# 2　技能習熟の数学的考察

本節は既報，技能習熟の数学的考察[3]の再吟味である。既報と重複するところが多いが読者の便を考慮して再掲した。

## 2.1 反復練習のときの技能習熟方程式

さきに，成瀬は言葉の習熟の法則性を考え言葉の習熟方程式として式(1)を導き，さらに，言葉の性質と技能の性質は似ていることから式(1)は技能習熟方程式でもあるとした。[1]　古賀は鋲座金組立作業，両手共応作業，鏡写作業，丸棒旋削などの習熟実験式はすべて式(1)の形で表わされることから式(1)はやはり技能習熟方程式といえることを報告した。[2][3] しかし，古賀の用いた実験はすべて技能訓練をほとんど必要としない作業であるので，厳密には，式(1)は反復練習による習熟方程式というべきである。

$$y = k\left(\frac{1}{(t_0)^n} - \frac{1}{t^n}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

式(1)で，$y$ は技能の通し評価点数[2]，$t$ は試行回数，$t_0$，$k$ 及び $n$ は実験定数である。これら実験定数は絶対に変わらない定数ではなく，数学のいわゆる不定定数であり，人が違えば，また人が変われば定数が変わる。人のいかなる因子の差が定数をいかに変えるかを明らかにすることが，この研究の一大目的である。

なお，ここで，職種によってはやり方を覚えることがむずかしく，覚えたら実際の行為はたやすい（神わざ的技能を考えると，たやすいとはいえない）と思われる場合があるが，そのような場合も式(1)は成り立つかという疑問が起こる。技能は頭で覚えることでなく，実際，手でできることである。それで疑問の場合は，方法書を与え，それを見ながら仕事を繰返えさせ，やがて方法書なしで仕事が上手にできるようになる。その習熟の過程をしらべることによって，やはり式(1)が成り立つことが実証されるであろう。

さて，式(1)から次の諸式が導かれる。

$$y_{t=0} = -\infty \quad \cdots\cdots(2)$$

$$y_{t=t_0} = 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$y_{t=1} = k\left(\frac{1}{(t_0)^x} - 1\right) \quad \cdots\cdots(4)$$

$$y_{t=\infty} = \frac{k}{(t_0)^x} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$y_{t=\infty} - y_{t=1} = k \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\dot{y} = \frac{nk}{t^{n+1}} \quad \cdots\cdots (7)$$

$$\dot{y}_{t=0} = +\infty \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\dot{y}_{t=1} = nk \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\dot{y}_{t=\infty} = 0 \quad \cdots\cdots (10)$$

ここで $\dot{y}$ は $y$ を $t$ で一回微分した習熟テンポである。

つぎに試行の $x$ 回目を新しく1回目の試行として考えた習熟を $y_x$ とする。そのときの実験定数を $x$ 時の定数と呼び，添字 $x$ をつける。しかるとき，$y_x$ は

$$y_x = k_x \left( \frac{1}{(t_{0x})^{n_x}} - \frac{1}{t^{n_x}} \right) \quad \cdots\cdots (11)$$

と書かれる。また，習熟 $y$ の $t \geqq x$ 部分と習熟 $y_x$ の $t \geqq 1$ 部分は一致することから，定数の関係式

$$n_x k_x = \frac{nk}{x^{n+1}} \quad \cdots\cdots (12)$$

$$n_x = \frac{n}{x} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$k_x = \frac{k}{x^n} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$t_{0x} = \left( \frac{t_0}{x} \right) x \quad \cdots\cdots (15)$$

が導かれる。なお，習熟 $y$ と習熟 $y_x$ を図示すると図1のようになる。図は習熟 $y$ の試行3回目を試行1回目として習熟 $y_x$ が描かれている。$t = 0$ は人が生まれたとき（あるいは人が母の胎内に生命を宿したとき）と考えられる。

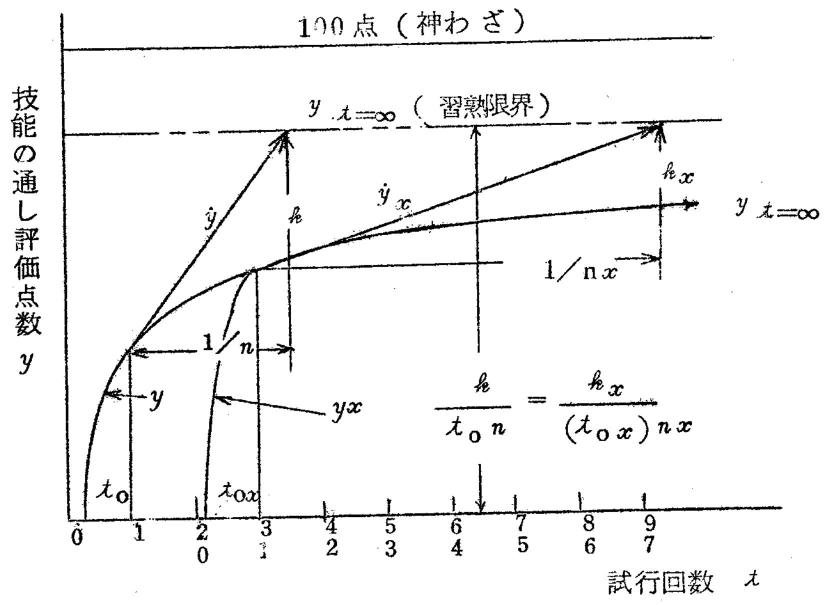


図1　技 能 習 熟 図 解

さて，以上の諸式から，技能習熟に関して次のように述べられる。

第１に，式(8)から人は無限の可能性を持って生まれるといえる。このことは人の可能性の基礎ともいわれる脳の神経細胞が１５０億～２００億と巨大であることからもうなずける。これと対照的に，式(2)から人は無限大の負の技能をかかえて生まれるといえる。すなわち，生まれてから技能を現わすに至るまでには非常に多くの準備が必要である。このことは，人間の行動の基礎である無条件反射ですら，その多くは生後の環境や体験の助けで完成されることからもうなずける。

第２に，式(3)から $t_0$ は技能習得のための準備が一応，整ったときと意義づけられる。図１では，$t_0 < 1$ と描かれているが，準備性が不充分な時期に技能を習い始めたときは $t_0 \geqq 1$ となることもある。

〝芸ごとは６つの節句に始めよ〟ということわざのとおり，技能を大きく育てるにも技能訓練は幼少のときから始めよとの説がある。式(3)，(4)，(5)において，$t_0$ が小さいほど技能が大きいことからも同様にいえる。またこのことは，人間の他に順応した行動の基礎である条件反射形成は脳の機能が未熟なときほど容易であることからも肯定できる。

しかし，式(1)，(4)，(5)は $n$，$k$ が大きいこともまた技能を大きくすることを示している。したがって，もし，$t_0$ を少さくすることと $n$，$k$ を大きくすることが，矛盾するか，あるいは同時には出来難いものである場合は技能訓練早期論の再検討が必要である。

なお，式(15)から $t_0$ は試行に連れて急速に小さくなることがわかる。

第3に，式(1)から技能は試行の単調反復のみによっても次第に大きくなることがわかる。しかし，次第に大きくなるとはいえ，習熟テンポは反復につれて，式(7)のように逐次小さくなり，けっきょく式(10)のように$t_{=\infty}$のときテンポは0となる。その結果，技能習熟には式(5)で示されるように，$t_0$，$n$，$k$を関数とした限界値がある。

第4に，式(6)から$k$は試行1回目における習熟残余量と意義づけられる。式(9)から$nk$は試行1回目における習熟テンポと意義づけられる。しかして，式(13)，(14)から$n$及び$k$はともに試行につれて小さくなるが，$n$は$k$に影響されず，$k$は$n$に影響されるといえる。

## 2.2 技能訓練の効果

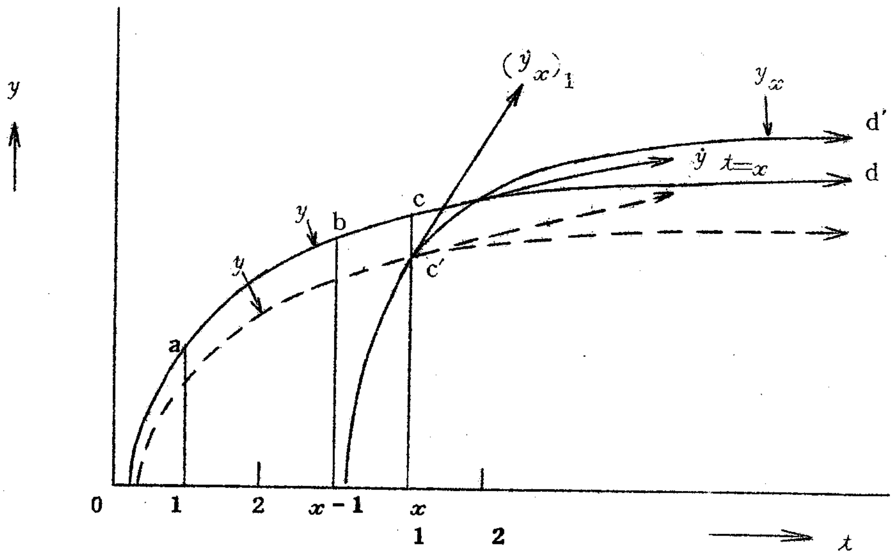


図2　習熟の改善（nが大きくなる場合）

いま，（$x-1$）回反復練習して技能が図2の曲線abのように習熟したとする。引き続き反復練習したとき技能が曲線bcdのように習熟することは，練習の結果をまつことなく式(1)からわかる。したがって，曲線bcdよりさらに良い技能習熟ができるためには反復練習をいったん中止して技能訓練を行ない習熟テンポを図の$\dot{y}_{t=x}$より大きくしてやらねばならない。習熟テンポは前節で述べたとおり$nk$で表わされるので，技能訓練によって$n$が大きくなる場合と$k$が大きくなる場合を考えてみる。

(1)　$n$が大きくなる場合

曲線abcdで示される習熟を習熟$y$とよぶ。習熟$y$を（$x-1$）回目で中止し，技能訓練を行なったのち反復練習を再開する。そのときの習熟曲線をc'd'とし習熟$y_x$とよぶ。技能訓練が短期日でしかもその効果が大きいときは，c'の技能はcの技能より大き

くなりうると考えられるが，実験結果から明らかなように，一般に小さくなる。また，図のように習熟 $y$ の曲線を縦軸方向に $c'$ まで平行移動して得た仮想の習熟を習熟 $y'$ とよぶ。

さて，習熟 $y$ の $x$ 時の $n$ 定数は式(13)から $n/x$ と表わされる。習熟 $y_x$ が習熟 $y$ より良いためには，その試行1回目の $n$ 定数 $(n_x)_1$ が $n/x$ より大きいことが必要である。いま，$n$ 定数の増加率を $\alpha$ とすれば

$$\alpha = \frac{x}{n}(n_x)_1 > 1 \quad \cdots\cdots (16)$$

となる。

つぎに，習熟 $y'$ の $n$ 定数及び $k$ 定数はそれぞれ習熟 $y$ の定数に等しいが，その $t_0$ 定数は

$$t_0' = \left(\frac{1}{t_0{}^n} - \frac{R}{k}\right)^{-\frac{1}{n}} \quad \cdots\cdots (17)$$

となる。ここでRは技能訓練中の技能忘却量であり $R = y_{t=x} - (y_x)_{t=1}$ である。また，習熟，習熟 $y'$ の $x$ 時の $t_0$ 定数は式(15)から $(t_0'/x)^x$ と表わされる。習熟テンポが大きくなった結果として，習熟 $y_x$ の試行1回目の $t_0$ 定数の $(t_{0x})_1$ は $(t_0'/x)^x$ より大きくなる。その増加率を $\beta$ とすれば

$$\beta = \left(\frac{x}{t_0'}\right)^x (t_{0x})_1 > 1 \quad \cdots\cdots (18)$$

となる。また，習熟 $y'$ の $x$ 時の $k$ 定数は式(14)から $k/x^n$ と表わされる。習熟 $y_x$ は $y'$ より改善されているので，その試行1回目の $k$ 定数の $(k_x)_1$ は $k/x^n$ より大きくなる。その増加率を $\gamma$ とすれば，

$$\gamma = \frac{x^n}{k}(k_x)_1 > 1 \quad \cdots\cdots (19)$$

となる。しかして，$y'_{t=x} = (y_x)_{t=1}$ であるので，式(1)，(11)，(19)，から

$$\gamma = \frac{\left(\frac{x}{t_0'}\right)^n - 1}{(t_{0x})_1^{-(n_x)_1} - 1} \quad \cdots\cdots (20)$$

が導かれ，習熟限界の増加量 $\delta L$ は

$$\delta L = (\gamma - 1)\frac{k}{x^n} \quad \cdots\cdots (21)$$

となる。

(2) $k$ が大きくなる場合

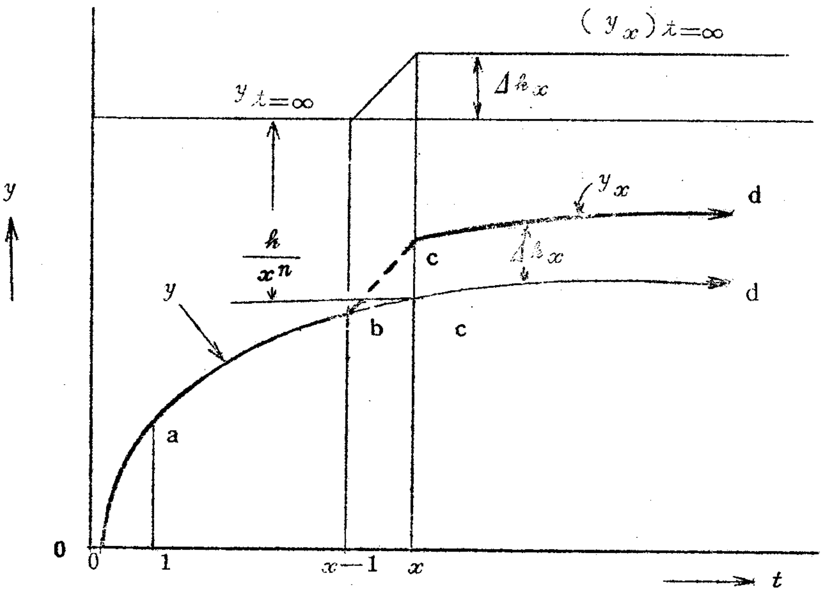


図３　習熟の改善（$k$ が大きくなる場合）

図３の曲線ａｂｃｄは図２の曲線ａｂｃｄと同様な習熟曲線である。この習熟の $t = x$ のときの習熟残余量，すなわち習熟 $y$ の $x$ 時の $k$ 定数は式(14)から $k／x^n$ となる。

もし，（$x - 1$）回目の試行と $x$ 回目の試行との中間に，技能訓練あるいはその他の何らかの原因で $n$ 定数は変らず $k$ 定数が $\delta k_x$ だけ増加することが起こりえたとする。しかるとき，習熟限界値は当然図に示した $y_{t=\infty}$ から $(y_x)_{t=\infty}$ に変らわす。

しかるに改善された習熟 $y_x$ の $n$ 定数は習熟 $y$ のｃｄにおける $n$ 定数に等しいことから，習熟 $y_x$ は必然的に図に示すように習熟 $y$ に $\delta k_x$ だけうわ積みした習熟となる。