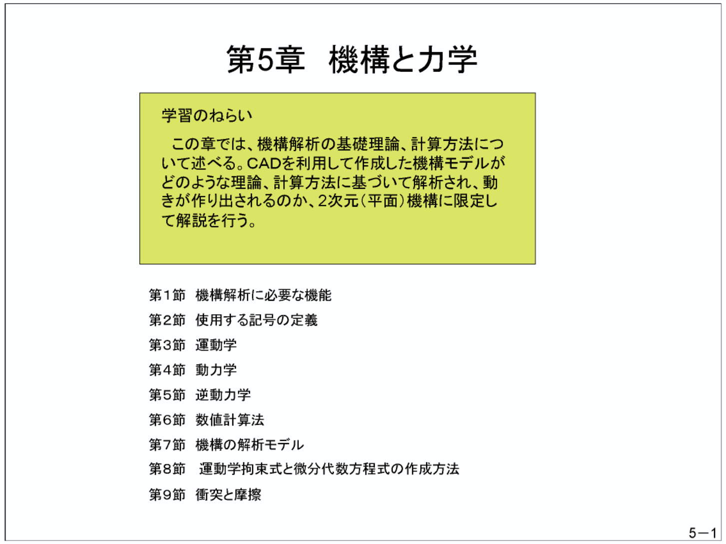
第５章　機構と力学

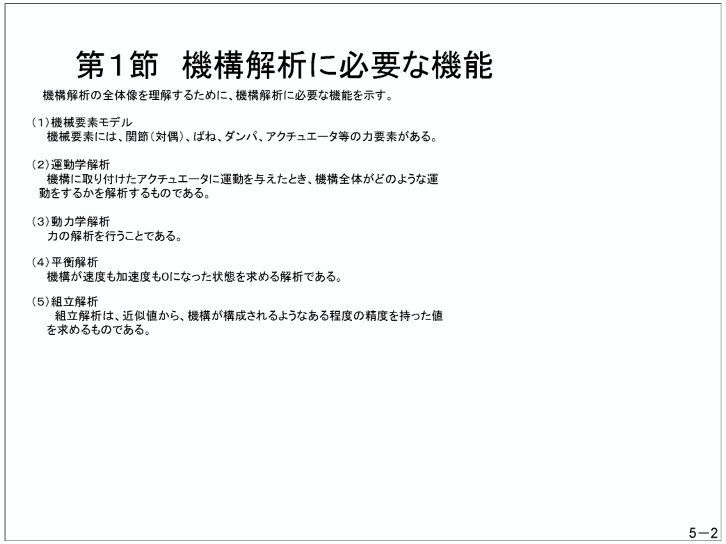


【章全体のねらい】

この章では、機構解析の基礎理論、計算方法について述べる。CADを利用して作成した機構モデルがどのような理論、計算方法に基づいて解析され、動きが作り出されるのか、2次元（平面）機構に限定して解説を行う。

【解説】

第1節　機構解析に必要な機能
第2節　使用する記号の定義
第3節　運動学
第4節　動力学
第5節　逆動力学
第6節　数値計算法
第7節　機構の解析モデル
第8節　運動学拘束式と微分代数方程式の作成方法
第9節　衝突と摩擦



【節のねらい】

機構解析の全体像を理解するために、機構解析に必要な機能を示す。

【解説】

（1）機械要素モデル

機構を解析するのに必要な機械要素は、関節（回転ジョイント、並進ジョイント、歯車、カム、スクリュージョイント、球ジョイント、ユニバーサルジョイント等）、ばね、ダンパ、アクチュエータ等の力要素がある。

（2）運動学解析

機構のアクチュエータに運動を与えたとき、機構全体がどのような運動をするかを解析するものである。これは、機構の任意点の時間ごとの位置、速度そして加速度を求める問題である。

（3）動力学解析

動力学解析には、順動力学解析と逆動力学解析の二種類の解析がある。順動力学解析は、アクチュエータに力を与えたとき、機構がどのように運動するか求める解析である。これは、関節に力あるいはトルクを与えて機構の運動方程式を解く力学の解析である。逆動力学解析は、運動学で求めた運動を実現するために必要な各関節の力／トルクを求める解析である。

（4）平衡解析

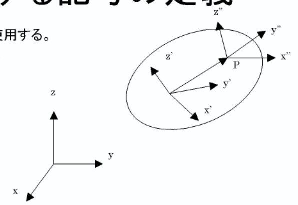
機構が速度も加速度も0になった状態を求める解析である。機構の全てのアクチュエータがパワーオフになったとき、どのような形態で停止するか求める解析である。

（5）組立解析

機構をなす機械要素の平面あるいは空間の位置と姿勢を求めるものである。組立解析は、近似値から、機構が構成されるようなある程度の精度を持った値を求めるものである。

第2節　使用する記号の定義

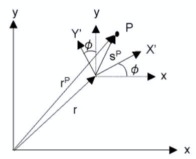
この章では、以下のような記号を使用する。
nb:機構を構成する全ボディ数
nc:一般化座標の数(3*nb個)
dof:機構の自由度
Φ:拘束式
Φq:ヤコビアン
ν:速度項
γ:加速度項
mi:ボディｉ の質量
Σ:ワールド座標系
Σ':x'-y'-z'座標系(ボディに固定された座標系)
Σ": x"-y"-z"座標系
J':Σ'で定義された慣性マトリクス
n:ボディに働く外トルク
F:ボディに働く外力
r:[x,y]T
A:座標変換マトリクス
C:ボディに固定された二つの座標系Σ''からΣ'への変換を示すマトリクス
Aij: Σj'からΣi'への座標変換マトリクス



5−3

【節のねらい】
この章で使用する記号を解説する。

【解説】
この章では、以下のような記号を使用する。
nb:機構を構成する全ボディ数
nc:一般化座標の数(3*nb個)
dof:機構の自由度
Φ:拘束式
Φq:ヤコビアン
ν:速度項
γ:加速度項
mi:ボディｉ の質量
Σ:ワールド座標系
Σ':x'-y'-z'座標系(ボディに固定された座標系)
Σ": x"-y"-z"座標系
J':Σ'で定義された慣性マトリクス
n:ボディに働く外トルク
F:ボディに働く外力
r:[x,y]T
A:座標変換マトリクス
C:ボディに固定された二つの座標系Σ''からΣ'への変換を示すマトリクス
Aij: Σj'からΣi'への座標変換マトリクス



x'-y'座標系における点Pの位置を表すベクトル:s'^P
x-y座標系における点Pの位置を表すベクトル:s^P
x-y座標系を用いた点Pの位置ベクトルは次のようになる。

$$r^P = r + s^P = r + As'^P$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

点Pの速度は次のようになる。

$$\dot r^P = \dot r + \dot\phi B s'^P$$

$$B = \begin{bmatrix} -\sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & -\sin\phi \end{bmatrix} = AR = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

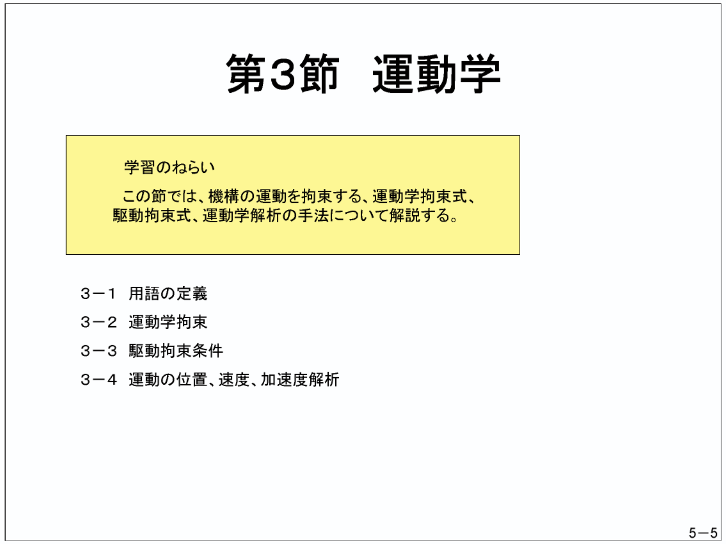
点Pの加速度は次のようになる。

$$\ddot r^P = \ddot r + \ddot\phi B s'^P + \dot\phi \dot B s'^P = \ddot r + \ddot\phi B s'^P - \dot\phi^2 A s'^P$$

$$\dot B = \dot\phi \begin{bmatrix} -\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix} = -\dot\phi A$$

5−4

【解説】
ボディ上の点Pの位置、速度、加速度の求め方。



【節全体のねらい】

この節では、機構の運動を拘束する、運動学拘束式、駆動拘束式、運動学解析の手法について解説する。

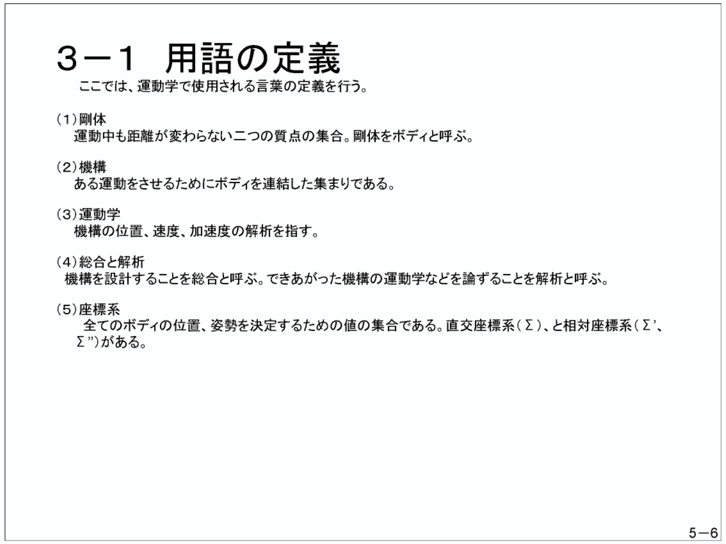
【解説】

3－1　用語の定義

3－2　運動学拘束

3－3　駆動拘束条件

3－4　運動の位置、速度、加速度解析



【ポイント】

ここでは、運動学で使用される言葉の定義を行う。

【解説】

(1)剛体

運動中も距離が変わらない二つの質点の集合。従って、剛体上に定義された位置ベクトルは、剛体の運動中も剛体に対しては相対的に運動しない。剛体をボディと呼ぶ。Ground(地面)もボディの一つとして取り扱う。

(2)機構

ある運動をさせるためにボディを連結した集まりである。

(3)運動学

機構の位置、速度、加速度の解析を指す。

(4)総合と解析

機構を設計することを総合と呼ぶ。できあがった機構の運動学などを論ずることを解析と呼ぶ。

(5)座標系

全てのボディの位置、姿勢を決定するための値の集合である。直交座標系(Σ)、と相対座標系(Σ'、Σ")がある。

(6)コンフィグレーション
機構の位置と姿勢をまとめてコンフィグレーションと呼ぶ。

(7)自由度
機構のコンフィグレーションを一意に決定するための、必要十分な座標系の個数。

(8)リンク、対偶、ジョイント(関節)
機構をなすボディのことをリンクと呼ぶ。隣り合うリンクの拘束を対偶あるいはジョイントと呼ぶ。

(9)運動学拘束
ボディの運動を制限するもので、ジョイントも含め拘束と呼ぶ。

5－7

【解説】

(6)コンフィグレーション

機構の位置と姿勢をまとめてコンフィグレーションと呼ぶ。

(7)自由度

機構のコンフィグレーションを一意に決定するための、必要十分な座標系の個数。

(8)リンク、対偶、ジョイント(関節)

機構をなすボディのことをリンクと呼ぶ。隣り合うリンクの拘束を対偶あるいはジョイントと呼ぶ。

(9)運動学拘束

ボディの運動を制限するもので、ジョイントも含め拘束と呼ぶ。

3－2　運動学拘束

本節では、運動学拘束について述べる。二つのボディiとボディjは相対的に3自由度の運動(x,y,ϕ)を行うが、次に述べる運動学拘束により相対運動が制限される。

(1)回転関節
回転関節は、図5-2のようにボディｉとボディｊに共通な点Pの回りの相対回転が可能である。一方のボディが固定されていれば、他方のボディは回転の1自由度を持つことになる。
従って、回転関節は一組の連結されたボディから2自由度を除去している。

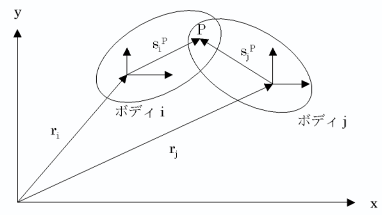


図5－2　回転関節

5－8

【ポイント】

本節では、各関節の運動学拘束について述べる。

【解説】

回転関節は、図5-2のようにボディｉとボディｊに共通な点Pの回りの相対回転が可能である。一方のボディが固定されていれば、他方のボディは回転の1自由度を持つことになる。従って、回転関節は一組の連結されたボディから2自由度を除去している。

回転関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{r(i,j)} = r_i + s_i^P - r_j - s_j^P$$
$$= r_i + A_i s_i^{'P} - r_j - A_j s_j^{'P}$$

この式を展開すると

$$\Phi^{r(i,j)} \equiv \begin{bmatrix} x_i + x_i^{'P} \cos\phi_i - y_i' \sin\phi_i - x_j - x_j' \cos\phi + y_j' \sin\phi_j \\ x_i + x_i^{'P} \sin\phi_i - y_i' \cos\phi_i - x_j - x_j' \sin\phi + y_j' \cos\phi_j \end{bmatrix}$$

となる。

5−9

【解説】

回転関節の拘束式はスライドのようになる。

（2）並進関節

並進関節は共通の軸に沿って2個のボディが相対的に直線運動できる。物理的には、一つのボディ上の直線溝に精密にはめ合わされているもう一つのボディの直線ブロックとして定義でき、それらの共通の中心線に沿って直動する。1つのボディが固定されれると、もう一方のボディの自由度は直動の１自由度だけになる。このように、並進関節は2個のボディから2つの自由度を除去することになる(図5-3)。

$v_i = \overrightarrow{P_iQ_i}$

$v_j = \overrightarrow{P_jQ_j}$

$d_{ij} = \overrightarrow{P_iP_j}$

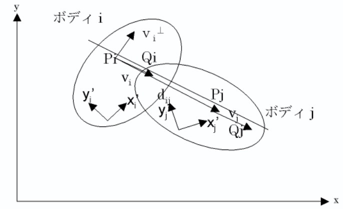


図５－３　並進関節

並進関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{t(i,j)} = \begin{bmatrix} (v_i^{\perp})^T d_{ij} \\ (v_i^{\perp})^T v_j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} v_i^{'T} R^R A_i^T (r_j + A_j s_j^{'P} - r_i - A_i s_i^{'P}) \\ v_i^{'T} R^T A_i^T A_j v_j' \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

5−10

【ポイント】

並進関節の拘束式

【解説】

並進関節は共通の軸に沿って2個のボディが相対的に直線運動できる。物理的には、一つのボディ上の直線溝nに精密にはめ合わされているもう一つのボディの直線ブロックとして定義でき、それらの共通の中心線に沿って直動する。1つのボディが固定されれると、もう一方のボディの自由度は直動の1自由度だけになる。このように、並進関節は2個のボディから2つの自由度を除去することになる(図5-3)。

(3) 複合関節
多くの運動学の応用例では、ボディの唯一つの機能が、回転と並進関節の組み合わせを用いて、2つのボディを結びつけるものがある。このような結合はカプラと呼ばれ、ボディとして扱う必要はない。このような組み合わせを複合関節とみなして、基本的な拘束式を作成し、カプラを表す一般化座標を導入しない。
a. 回転－回転関節
図に示す回転－回転関節は、二つの回転関節としても表すことができるが、中間リンクの質量が無視できるとすると、ベクトルdijの長さが一定で、2点Pi、Pj間の距離（＝C）に等しいという拘束として定義できる（図5-4）。

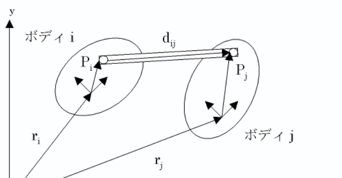


図５－４　回転－回転関節

回転－回転関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{rr(i,j)} = (x_i^P - x_j^P)^2 + (y_i^P - y_j^P)^2 - C^2 = 0$$

5－11

【ポイント】
複合関節の拘束式

【解説】
多くの運動学の応用例では、ボディの唯一つの機能が、回転と並進関節の組み合わせを用いて、2つのボディを結びつけるものがある。このような結合はカプラと呼ばれ、ボディとして扱う必要はない。このような組み合わせを複合関節とみなして、基本的な拘束式を作成し、カプラを表す一般化座標を導入しない。

回転－回転関節

図に示す回転－回転関節は、二つの回転関節としても表すことができるが、中間リンクの質量が無視できるとすると、ベクトルdijの長さが一定で、2点Pi、Pj間の距離（＝C）に等しいという拘束として定義できる（図5-4）。

b. 回転－並進関節
図5-5は回転－並進関節を示している。ボディｉ とボディｊ は、ボディｊ上に回転関節をもち、ボディｉ上に並進関節をもつカプラで結合されている。2つの異なった点PiとQiがボディｉの直動軸線上にある。回転関節は直動軸線から一定距離Cだけ離れている。もし、ボディｊが固定されている場合には、カプラとボディｉも回転できる。さらに、ボディｉはベクトルviの方向に直進できる。従って、自由度は2である。拘束式は直動軸から回転関節までの距離Cで定義される。

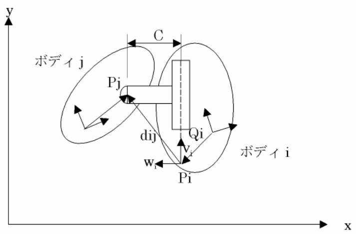


図５－５　回転－並進関節

回転－並進関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{rt(i,j)} = \frac{1}{v_i} v_i'^T R^T A_i^T (r_j + A_j s_j'^P - r_i - A_i s_i'^P) - C = 0$$

5－12

【ポイント】
回転－並進関節の拘束式

【解説】
図5-5は回転－並進関節を示している。ボディｉ とボディｊ は、ボディｊ上に回転関節をもち、ボディｉ上に並進関節をもつカプラで結合されている。2つの異なった点PiとQiがボディｉの直動軸線上にある。回転関節は直動軸線から一定距離Cだけ離れている。もし、ボディｊが固定されている場合には、カプラとボディｉも回転できる。さらに、ボディｉはベクトルviの方向に直進できる。従って、自由度は2である。拘束式は直動軸から回転関節までの距離Cで定義される。

c. 歯車
　歯車の例を図5-6に示す。ボディｉ とボディｊのそれぞれの中心をPi、Pjとし、歯車の最初のかみ合い点をQi、Qjとする。歯車の拘束条件は、ボディｉ とボディｊが滑らないで互いに回転することである。

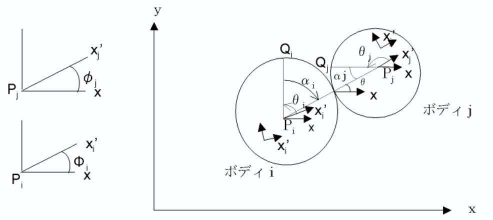


図5－6　歯車

歯車の拘束式は次式のように表される。ここで、 $u^{\perp}=[-\sin\theta \quad \cos\theta]^T$ とする。
uは点P_iから点P_jへ向かう単位ベクトルである。

$$\Phi^{g(i,j)}=(r_j^P-r_i^P)^T u^{\perp}$$
$$=(x_j^P-x_i^P)\sin\theta-(y_j^P-y_i^P)\cos\theta=0$$

5－13

【ポイント】
　歯車の拘束式

【解説】
　歯車の例を図5-6に示す。ボディｉ とボディｊのそれぞれの中心をPi、Pjとし、歯車の最初のかみ合い点をQi、Qjとする。歯車の拘束条件は、ボディｉ とボディｊが滑らないで互いに回転することである。

d. カム・フォロワ
　図5-7はカム・フォロワのもっとも一般的な形を示している。この図ではボディiがカムで、ボディjがフォロワである。図に示すように、カム・フォロワの拘束は、接触における位置と傾きが等しいことである。

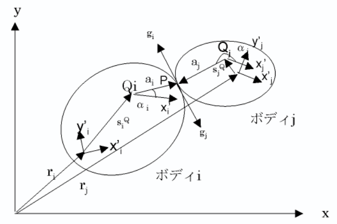


図5－7　カム・フォロワ

カム・フォロワの拘束式は次式のように表される。ここで、$\rho(\alpha)$ は $a(\alpha)$の長さで、$u'(\alpha)=[\cos\alpha \quad \sin\alpha]^T$ である。

$$\Phi^{cf(i,j)}=\begin{bmatrix} r_i+A_i(s_i^{'Q}+\rho_i u_i^{'})-A_j(\rho_j u_j^{'}+s_j^{'Q})-r_j \\ -g_i^T B_{ij} g_j^{'} \end{bmatrix}=0$$

上式の第1式はボディ iとボディ jが点Pで共有していることを、第2式はgiとgjが平行であることを示している。

5－14

【ポイント】
　カム・フォロワの拘束式

【解説】
　図5-7はカム・フォロワのもっとも一般的な形を示している。この図ではボディiがカムで、ボディjがフォロワである。図に示すように、カム・フォロワの拘束は、接触における位置と傾きが等しいことである。

e. その他の拘束
多くの機構では、ボディの運動はベースに対して、すなわち静止x-y座標系に対して拘束されている。
①絶対距離拘束
図3-8に示すように、絶対距離拘束はボディ i 上の点Piと平面上の固定点(C1、C2)との距離が一定であることである。

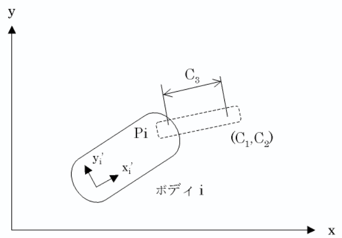


図5－8　絶対距離拘束

$$\Phi^{ad(i,j)} \equiv (r_i^P - C)^T (r_i^P - C) - C_3^2$$
$$= \left(x_i + x_i'^P \cos\phi_i - y_i'^P \sin\phi_i - C_1\right)^2$$
$$+ \left(y_i + x_i'^P \sin\phi_i + y_i'^P \cos\phi_i - C_2\right)^2 - C_3^2 = 0$$

5－15

【ポイント】
絶対拘束と絶対距離拘束式

【解説】
図5-8に示すように、絶対距離拘束はボディ i 上の点Piと平面上の固定点(C1、C2)との距離が一定であることである。

②絶対 x, y, ϕ 拘束
図5-9に示すように、この拘束はボディ iに固定された点Piの座標 x_i, y_i, ϕ_i がそれぞれ拘束されることである。

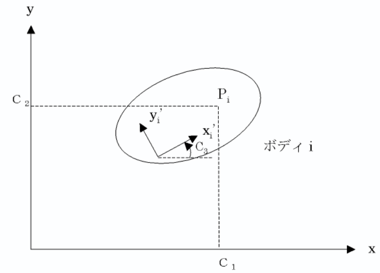


図5－9　絶対拘束

$$\Phi^{ax(i)} \equiv x_i^P - C_1 = 0$$
$$= x_i + x_i'^P \cos\phi_i - y_i'^P \sin\phi_i - C_1 = 0$$
$$\Phi^{ay(i)} \equiv y_i^P - C_2 = 0$$
$$= x_i + x_i'^P \sin\phi_i + y_i'^P \cos\phi_i - C_2 = 0$$
$$\Phi^{a\phi(i)} \equiv \phi_i - C_3 = 0$$

5－16

【ポイント】
絶対x,y, φ 拘束

【解説】
図5-9に示すように、この拘束はボディ iに固定された点Piの座標x_i,y_i, ϕ_iがそれぞれ拘束されることである。

3－3　駆動拘束条件

多くの機械システムでは、運動学的な構造に加えて、ある位置座標やボディ間の相対位置の時系列をアクチュエータの入力で制御されている。ロボットやNC工作機械はその代表的な例である。機構の運動の時系列を唯一つに決定するには、そのシステムの自由度に相当する数の入力が必要になる。
この節では、運動学解析で用いる、駆動拘束と呼んでいる標準的なドライバについて述べる。

（1）回転駆動
回転駆動は、図5-10のようにボディ iとボディ jが点Pを共有し、点Pにおいて定義された座標系に対して、相対的に回転運動 を行う。この図で、θ_i、θ_jはそれぞれボディi、ボディjへの取付け角度である。

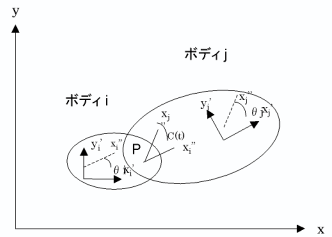


図5－10　回転駆動

$$\Phi^{rrd(i,j)} = (\phi_j + \theta_j) - (\phi_i + \theta_i) - C(t) = 0$$

5－17

【ポイント】

駆動拘束条件

多くの機械システムでは、運動学的な構造に加えて、ある位置座標やボディ間の相対位置の時系列をアクチュエータの入力で制御されている。ロボットやNC工作機械はその代表的な例である。機構の運動の時系列を唯一つに決定するには、そのシステムの自由度に相当する数の入力が必要になる。

回転の行動拘束式

【解説】

回転駆動は、図5-10のようにボディ iとボディ jが点Pを共有し、点Pにおいて定義された座標系に対して、相対的に回転運動 を行う。この図で、θi、θjはそれぞれボディi、ボディjへの取付け角度である。

（2）並進駆動
並進駆動は、図5-11のようにボディ iの点P_iとボディ jの点P_jの距離がC(t)となる拘束である。

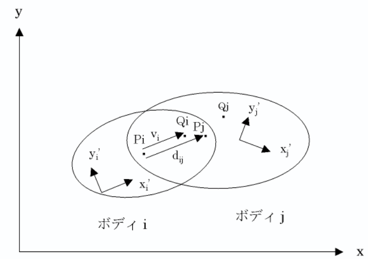


図5－11　並進駆動

$$\Phi^{tdd(i,j)} = v_i^{\prime T} A_i^T (r_j - r_i) + v_i^{\prime T} A_{ij} s_i^{\prime P} - v_i^{\prime T} s_i^{\prime P} - v_i C(t) = 0$$

5－18

【ポイント】

並進駆動の拘束式

【解説】

並進駆動は、図5-11のようにボディ iとボディ jの点Pjの距離がC(t)となる拘束である。

(3)絶対駆動
絶対駆動は、図5-12のようにボディ i上の点Piのに関する拘束がある。

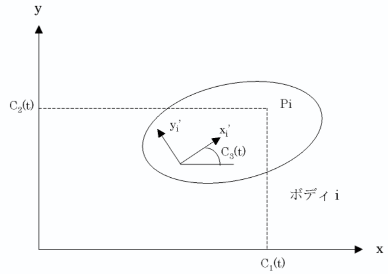


図5－12 絶対駆動

$$\Phi^{axd(i)} = x_i^P - C_1(t) = 0$$
$$\Phi^{ayd(i)} = y_i^P - C_2(t) = 0$$
$$\Phi^{a\phi d(i)} = \phi_i - C_3(t) = 0$$

5－19

【ポイント】
絶対駆動の拘束式

【解説】
絶対駆動は、図5-12のようにボディ i上の点Piのに関する拘束がある。

(4)相対駆動
相対駆動は、図5-13、図5-14のようにボディ iとボディ jについて拘束が定義できる。

$$\Phi^{rxd(i,j)} = x_j^P - x_i^P - C_1(t) = 0$$
$$\Phi^{ryd(i,j)} = y_j^P - y_i^P - C_2(t) = 0$$
$$\Phi^{r\phi d(i,j)} = \phi_j - \phi_i - C_3(t) = 0$$
$$\Phi^{rdd(i,j)} = (x_j^P - x_i^P)^2 + (y_j^P - y_i^P)^2 - (C_4(t))^2 = 0$$

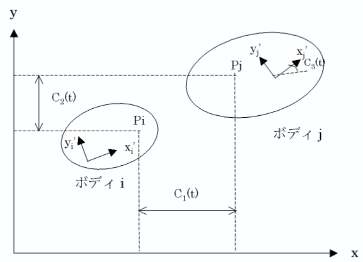


図5－13 相対駆動

5－20

【ポイント】
相対駆動の拘束式

【解説】
相対駆動は、図5-13、図5-14のようにボディ iとボディ jについて拘束が定義できる。

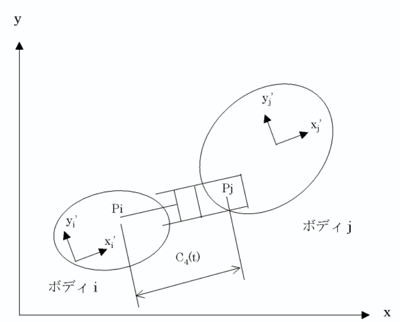


図5－14　相対距離駆動

5－21

【解説】

スライド参照

3－4　運動の位置、速度、加速度解析

（1）運動学解析

機構のnh個の運動学拘束を

$$\Phi^K(q) \equiv \left[\Phi_1^K(q)\ ,\cdots;\ \Phi_{nh}^K(q)\right] = 0$$

とし、dof個の駆動拘束を

$$\Phi^D(q,t) \equiv \left[\Phi_1^D(q,t)\ ,\cdots;\ \Phi_{dof}^D(q,t)\right] = 0$$

とする。運動学拘束式と駆動拘束式を合わせて

$$\Phi(q,t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(q) \\ \Phi^D(q,t) \end{bmatrix}_{nc\times 1} = 0$$

とする。ここで、次のことに注意する。

① nb個のボディからなる機構は一般化座標nc=3×nb個を持つ。ただし、カムでは形状を定義する回転角が追加される。

②運動学拘束がnh個であるとき、その機構の自由度はdof=nc－nhである。

③駆動拘束はdof個必要である。

5－22

【ポイント】

運動の位置、速度、加速度解析手法を理解する。

運動学拘束式の立て方を理解する。

（2）位置解析
駆動拘束の時間変化に従って $\Phi(q,t)=0$ を満たすように他の一般化座標を求める。数値解法としてニュートン・ラプソン法が用いられる。

（3） 速度方程式
拘束式 Φ を時間で微分して得られる、速度方程式

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t \equiv \nu$$

を解くことによりを求める。

（4） 加速度方程式
速度方程式を時間で微分して得られる、加速度方程式

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt} \equiv \gamma$$

を解くことにより $\ddot{q}$ を求める。

5－23

【ポイント】
位置の求め方を理解する。
速度の求め方を理解する。
加速度の求め方を理解する

第4節 動力学

学習のねらい
剛体の考え方、力の考え方と運動方程式の立て方を解説する。

4－1 拘束のない運動方程式
4－2 慣性モーメント
4－3 一般化力と力要素
4－4 拘束のある場合の運動方程式

5－24

【節全体のねらい】
剛体の考え方、力の考え方と運動方程式の立て方を解説する。

【解説】
4－1 拘束のない運動方程式
4－2 慣性モーメント
4－3 一般化力と力要素
4－4 拘束のある場合の運動方程式

4－1　拘束のない運動方程式

図5-15のように、剛体が平面上を自由に運動しているとする。このボディの重心に座標系を設定する。その剛体の重心に力F、モーメントnが働くとき、運動方程式は次式のようになる。ここで、mはボディの質量、rはx-y座標系からx'-y'座標系の原点へのベクトル、ϕはxとx'間の角度、J'は物体の重心まわりの慣性モーメントである。

$$m\ddot{r} = F$$

$$J'\ddot{\phi} = n$$

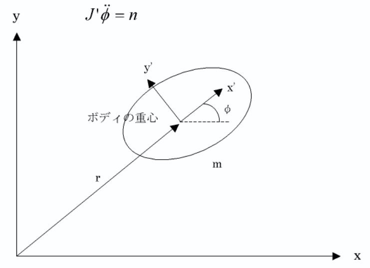


図5－15　ボディに作用する力

5－25

【ポイント】

拘束のないときの運動方程式の立て方

【解説】

図5-15のように、剛体が平面上を自由に運動しているとする。このボディの重心に座標系を設定する。その剛体の重心に力F、モーメントnが働くとき、運動方程式は次式のようになる。

4－2　慣性モーメント

慣性モーメントはボディの回転のしにくさを示す物理量である。慣性モーメントは次のように表される。

$$J'' = \int_m s''^{PT} s''^{P} dm$$

図5-16に示すように、慣性モーメントは（重心からの距離の2乗）とdm（微小質量）をかけたものをボディ全体にわたって積分することで求められる。上式は、x''-y''座標系に関する慣性モーメントである。重心まわりの慣性モーメントは次式のようになる。

$$J' = J'' - m|\rho'|^2$$

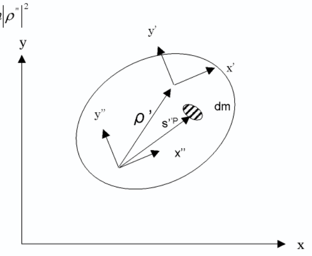


図5－16　重心の位置

5－26

【ポイント】

慣性モーメント

【解説】

慣性モーメントはボディの回転のしにくさを示す物理量である

4－3　一般化力と力要素

図5-17に示すように、ボディ 上の点Pに力FPとトルクnが働いているとする。このとき座標系x'-y'にかかる力とトルクは次のようになる。ここで、Qを一般化力と言う。

$$Q = \begin{bmatrix} A_i \\ (Rs'^P)^T \end{bmatrix} F'^P + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$$

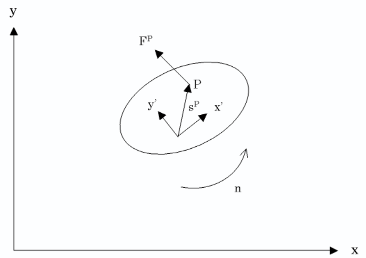


図5－17　P点に作用する力

5－27

【ポイント】

一般化力と力要素（ばね、ダンパ、アクチュエータ）

【解説】

図5-17に示すように、ボディ 上の点Pに力FPとトルクnが働いているとする。このとき座標系x'-y'にかかる力とトルクは次のようになる。ここで、Qを一般化力と言う。

（1）直動ばね・ダンパ・アクチュエータ

図5-18に直動のばね、ダンパ、アクチュエータからなる力要素を示す。

$$l^2 = d_{ij}{}^T d_{ij}$$

とすると、力要素の出力fは

$$f = k(l - l_0) + c\dot{l} + F(l, \dot{l}, t)$$

である。ここで、k：ばね定数、l0：lの自然長、c：ダンピング係数、F：アクチュエータによる力要素関数である。この力要素によりボディ iとボディ jに及ぼす一般化力／トルクは次式で表される。

$$Q_i = \frac{f}{l}\begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ij}{}^T B_i s_i' \end{bmatrix}$$

$$Q_i = -\frac{f}{l}\begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ij}{}^T B_j s_j' \end{bmatrix}$$

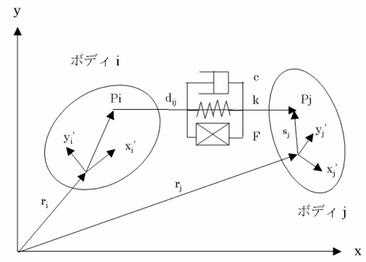


図5－18　直動ばね・ダンパ・アクチュエータ

5－28

【ポイント】

力要素（直動ばね・ダンパ・アクチュエータ）

(2)回転ばね・ダンパ・アクチュエータ

図5-19に直動のアクチュエータ、ばね、ダンパからなる力要素を示す。

$$\theta_{ij} = \phi_j - \phi_i$$

とすると、この力要素の出力トルクは次のようになる。

$$n = k_\theta(\theta_{ij} - \theta_i) + c_\theta \dot{\theta}_{ij} + N(\theta_{ij}, \dot{\theta}_{ij}, t)$$

ここで、k_θ:ばね定数、θ_0:ばねの自然長、c_θ:ダンピング定数、N:アクチュエータによるトルクの関数である。ボディiとボディjに及ぼす一般化力/トルクは次式で表される。

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} \qquad Q_j = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$$

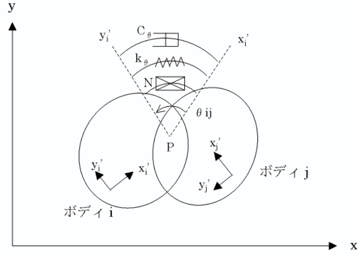


図5－19　回転ばね・ダンパ・アクチュエータ

5－29

【ポイント】

力要素(回転ばね・ダンパ・アクチュエータ)

4－4　拘束のある場合の運動方程式

4－1の式について、rとφの微小変化とに対する仮想仕事を考えると次式のように表される。

$$\delta r^T[m\ddot{r} - F] + \delta\phi[J'\ddot{\phi} - n] = 0$$

これをまとめると、$\delta r^T[M\ddot{q} - Q] = 0$　となる。ここで、

$$q = [x \quad y \quad \phi]^T \qquad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J' \end{bmatrix} \qquad Q = [F^T \quad n]^T$$

である。次にnb個のボディについて、上式の和を考えると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T Q_i^c = 0$$

ここで

$$Q_i^A = Q_i - Q_i^C$$
$$q = [q_1^T \quad q_2^T \quad \cdots \quad q_{nb}^T]^T$$
$$M = diag(M_1, M_2, \cdots, M_{nb})$$
$$Q = [Q_1^T \quad Q_2^T \quad \cdots \quad Q_{nb}^T]^T$$

である。まとめると次式のようになる。

$$\delta q^T[M\ddot{q} - Q^A] = 0 \qquad (3-1)$$

一方、機構の拘束条件から　$\Phi_q \delta q = 0$　　(3－2)

式(3-1)と式(3-2)から、ラグランジュの乗数ベクトルλを用いて

$$[M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda - Q^A]^T \delta q = 0 \qquad (3-3)$$

となる。

5－30

【ポイント】

拘束のある場合の運動方程式の立て方を理解する。

微分代数方程式(DAE)

任意のについて、上式が成り立つためには

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda - Q^A = 0 \qquad (3-4)$$

でなければならない。これが拘束を持った機構の運動方程式である。この式と加速度方程式を連立させた、次式を微分代数方程式と言う。

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad (3-5)$$

5－31

【節のねらい】

逆動力学の求め方を理解する。

【解説】

逆動力学とは、機構の運動が与えられたとき、関節にかかる力／トルクを求める問題をいう。

第5節　逆動力学

逆動力学とは、機構の運動が与えられたとき、関節にかかる力／トルクを求める問題をいう。 式(3-4)から

$$\lambda = \Phi_q^{-1T}\left[Q^A - M\ddot{q}\right] \qquad (3-6)$$

となる。したがって、ボディ iに関する第k番の拘束について、次に示す仮想仕事を考える(図5-20)。

$$-\delta q_i^T \Phi_{q_i}^{kT} \lambda^k = -(\delta r_i^T \Phi_{r_i}^{kT} \lambda^k + \delta\phi_i \Phi_{\phi_i}^{kT} \lambda^k)$$
$$= \delta r_i^{''PT} F_i^{''k} + \delta\phi_i T_i^{''k}$$

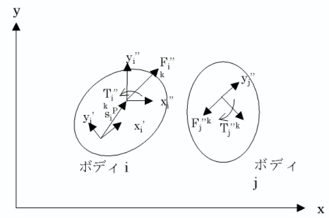


図5－20　作用反作用力

δr_i と$\delta r_i''$ の関係は以下のようにして求められる。

$$r_i^P = r_i + A_i s_i^{'P}$$
$$\delta r_i^P = \delta r_i + B_i s_i^{'P} \delta\phi_i$$

r_i^Pの微小変化分 δr_i^P と $r_i^{''P}$の微小変化分 $\delta r_i^{''P}$ の関係は、第k関節が定義されているx_i''-y_i''座標系から、重心が定義されている$x^{i'}$-y_i'座標系への変換マトリクスCiとAiを用いて

$$\delta r_i = A_i C_i \delta r_i^{''P} - B_i s_i^P \delta\phi_i \qquad (3-7)$$

式(3-7)を式(3-2)に代入すると関節の反力と反トルクは次のようになる。

$$F_i^{''k} = -C_i^T A_i^T \Phi_{r_i}^{kT} \lambda^k$$
$$T_i^{''k} = (s_i^{'PT} B_i^T \Phi_{r_i}^{kT} - \Phi_{\phi_i}^{kT})\lambda^k$$

5－32

【解説】

スライド参照

第6節　数値計算法

学習のねらい

機構解析では、組み立てた機構モデルを色々な数値計算法を用いて解く。ここでは、機構解析で用いる、ガウスの消去法、ニュートン・ラプソン法と動力学解析で用いるルンゲ・クッタ法について述べる。

6－1　ガウスの消去法
6－2　ニュートン・ラプソン法
6－3　ルンゲ・クッタ法

5－33

【節全体のねらい】

この節では、機構解析で使用する数値計算法を解説と例題を示す。

機構解析では、組み立てた機構モデルを色々な数値計算法を用いて解く。ここでは、機構解析で用いる、ガウスの消去法、ニュートン・ラプソン法と動力学解析で用いるルンゲ・クッタ法について述べる。

【解説】

6－1　ガウスの消去法
6－2　ニュートン・ラプソン法
6－3　ルンゲ・クッタ法

6－1　ガウスの消去法

運動学解析で導いた速度と加速度の式は行列方程式であり、数値的に解かなければならない。n個の未知数をもち係数が実数であるn個の線形代数方程式について考える。

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

上式を行列表示にすると、つぎのようになる。

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b} \qquad (3-8)$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{na} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$$

5－34

【ポイント】

ガウスの消去法

【解説】

運動学解析で導いた速度と加速度の式は行列方程式であり、数値的に解かなければならない。n個の未知数をもち係数が実数であるn個の線形代数方程式について考える。

式(3-8)を解く方法がガウスの消去法である。この方法は一度に1つの変数を消去する方法で、前向き消去と後ろ向き代入の2つの主要なステップで構成されている

（1）前向き消去

まず、最初の方程式をa_{11}で割りの係数を1にする(いま$a_{11} \neq 0$と仮定する)。次に、修正した最初の式に$-a_{j1}$を掛け、その結果の式をj番目の式に加えることによりj番目の式から変数x_1を消去する。j=2,...,nに、この操作を行うと、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

さらに、$a_{22}^{(1)} \neq 0$と仮定して、式(3-9)の第2番目の式を$a_{22}^{(1)}$で割り、x_2の係数を1にする。次に、この式を$-a_{j2}$倍し、j番目j=3,…,nの式に加えることによってj番目の式からx_2を消去すると次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

このアルゴリズムの(n-1)ステップ後、いまと$a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$仮定して、$a_{nn}^{(n-1)}$でn番目の行を割ると、前向き消去の最終結果が得られる。

5－35

【解説】

スライド参照

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

この得られた行列は、対角線より下の要素がすべて0である。

（2）後ろ向き代入

後ろ向き代入は後ろ向き代入式(3-10)を使用した(n-1)個の基本的な解法ステップで構成されている。式(3-10)のn番目から$x_n=b_n^{(n)}$である。のこの値を(n-1)番目の式に代入する。(n-1)番目の式からx_{n-1}の値が求められる。一つ前の式に対してこの方法を繰り返し用いると、残りの変数を順次求めることができる。

[例題]

次の行列方程式の解を求めなさい。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

（解答）

前向き消去を行うと、次のようになる。第1行目を3で割りのx_1係数を1にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5－36

【解説】

スライド参照

上式の第1行目の式と第2行目の式に加える。次に、第1行目の式に-2をかけ、その結果を第3行目の式に加える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 7/3 & 2/3 \\ 0 & -11/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/3 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

上式の第2行目の式を7/3で割りの係数を1にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & -11/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

上式の第2行目の式を11/3倍し第3行目の式に加える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 19/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ 57/7 \end{bmatrix}$$

上式の第3行目の式を19/7で割りx_3の係数を1にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

後ろ向き代入を行うと次のようになる。

$$x_3 = 3$$

$$x_2 + \frac{2}{7}\times 3 = \frac{20}{7} \quad \text{より} \quad x_2 = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_1 + \frac{1}{3}\times 2 - \frac{1}{3}\times 3 = \frac{2}{3} \quad \text{より} \ x_1 = 1$$

5−37

【解説】

スライド参照

6−2 ニュートン・ラプソン法

運動学解析の位置の式は一般に非線形であるが、線形方程式を繰り返し解くことにより、この非線形方程式を解くことができる。

スカラ変数qからなる次のような非線形方程式について考える。

$$\Phi(q) = 0 \qquad (3-11)$$

q=q*を式(3-11)の解とし、$q^{(i)}$をq*の近似値とする。Φ(q)を$q=q^{(i)}$点まわりでテイラー級数に展開すると

$$\Phi(q) = \Phi(q^{(i)}) + \Phi_q(q^{(i)})(q - q^{(i)}) + \text{高次成分の項} \qquad (3-12)$$

となる。もし$q^{(i+1)}-q^{(i)}$が小さいならば高次の項を無視できため、$q=q^{(i+1)}$を修正した近似値であるとする。それは次のようになる。

$$\Phi(q^{(i+1)}) \approx \Phi(q^{(i)}) + \Phi_q(q^{(i)})(q^{(i+1)} - q^{(i)}) = 0 \qquad (3-13)$$

すなわち$q=q^{(i+1)}$が改良された近似値である。もし$\Phi_q(q^{(i)})$ならば式(3-13)を解いて、次式が得られる。

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} - \frac{\Phi(q^{(i)})}{\Phi_q(q^{(i)})} \qquad (3-14)$$

式(3-14)は式(3-11)の解の初期値から始まり、次々に近似解を求めるのに利用する。

ニュートン・ラプソン法は次に示す、計算手順で行う。

①式(3-11)の解の初期値$q^{(0)}$を推定する。
② 逐次$\Phi(q^{(i)})$と$\Phi_q(q^{(i)})$を計算する(i=0,1,…,)。式の許容誤差をε_eとし、ε_sを解の許容誤差とすると、$\left|\Phi_q(q^{(i)})\right| < \varepsilon_e$ かつ $\left|q^{(i)} - q^{(i-1)}\right| < \varepsilon_s$ ならば、計算を打ち切る。そうでなければ次のステップ3に進む。
③式(3-14)から$q^{(i+1)}$を計算し、iの代わりにi+1としてステップ2に戻る。

5−38

【ポイント】

ニュートン・ラプソン法

【解説】

運動学解析の位置の式は一般に非線形であるが、線形方程式を繰り返し解くことにより、この非線形方程式を解くことができる。

[例題]
次に示す2次式の解を求めなさい。ただし許容誤差 $\varepsilon_s = \varepsilon_e = 0.02$ とする。

$$\Phi(q) = (q-1)^2 - 3$$

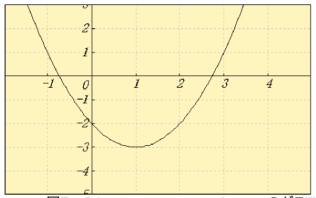


図5－21 $\Phi(q) = (q-1)^2 - 3$ のグラフ

(解答)
初期値を $q^{(0)} = 3$ とする。
$\Phi_q(q-1) = 2(q-1)$ である。

$\Phi(q^{(0)}) = (3-1)^2 - 3 = 1$

$\Phi_q(q^{(0)}) = 2\times(3-1) = 4$

であるので、式(3-13)より、

$$q^{(1)} = q^{(0)} - \frac{\Phi(q^{(0)})}{\Phi_q(q^{(0)})} = 3 - \frac{1}{4} = 2.75$$

5－39

【解説】
スライド参照

$\left|q^{(1)} - q^{(0)}\right| = \left|2.75 - 3\right| = 0.25 \quad > \varepsilon_s$

であるので、$q^{(2)}$ を求める。

$\Phi(q^{(1)}) = (2.75-1)^2 - 3 = 0.0625 \quad > \varepsilon_e$

$\Phi_q(q^{(1)}) = 2\times(2.75-1) = 3.5$

$$q^{(2)} = q^{(1)} - \frac{\Phi(q^{(1)})}{\Phi_q(q^{(1)})} = 2.75 - \frac{0.0625}{3.5} = 2.732$$

$\left|q^{(2)} - q^{(1)}\right| = \left|2.732 - 2.75\right| = 0.018 \quad < \varepsilon_s$

$\Phi(q^{(2)}) = (2.732-1)^2 - 3 = -0.000176 \quad < \varepsilon_e$

であるので、この方程式の解は $q = 2.732$ となる。

5－40

【解説】
スライド参照

6－3　ルンゲ・クッタ法

動力学解析で用いる、微分方程式を数値的に解く解法について述べる。

次に示す1階の常微分方程式　$\dfrac{du}{dt} = f(u,t)$　$(3-15)$

について考える。この微分方程式の解は、次式に示す積分した形に直し、その右辺第2項をなるべく精度よく近似し、k=0,1,2,…の順に計算を進めて解を求める。

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u,t)dt \quad (3-16)$$

ルンゲ・クッタ法は上式の右辺第2項を

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u,t)dt = \frac{\Delta u_1 + 2\Delta u_2 + 2\Delta u_3 + \Delta u_4}{6} \quad (3-17)$$

とおいて解を求める方法であり、台形公式、中点公式やシンプソン法に比べて精度良く解を求めることができる。

式(3-17)において

$$\Delta u_1 = f(u(t_k), t_k)\Delta t$$
$$u_1 = u(t_k) + \Delta u_1 / 2$$
$$\Delta u_2 = f(u_1, t_k + \Delta t/2)\Delta t$$
$$u_2 = u(t_k) + \Delta u_2 / 2$$
$$\Delta u_3 = f(u_2, t_k + \frac{\Delta t}{2})\Delta t$$
$$u_3 = u(t_k) + \Delta u_3$$
$$\Delta u_4 = f(u_3, t_k + \Delta t)\Delta t$$

とする。

5－41

【ポイント】

ルンゲ・クッタ法

【解説】

動力学解析で用いる、微分方程式を数値的に解く解法について述べる。

［例題］

次の微分方程式の計算をしなさい。

$$\frac{du}{dt} = u$$

ただし、この式の厳密解は e^t である。初期値を、$u(0)$　刻み幅を Δt　とする。

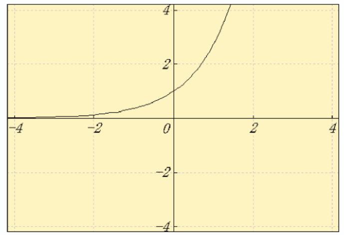


図5－22　$u = e^t$　のグラフ

5－42

【解説】

スライド参照

（解答）

$$\Delta u_1 = u(0) \times \Delta t \quad u_1 = u(0) + \frac{\Delta u_1}{2} = u(0) + \frac{u(0)}{2}\Delta T$$

$$\Delta u_2 = u_1 \Delta t = u(0)(\Delta(+ \frac{1}{2}\Delta t^2) \qquad u_2 = u(0)(1 + \frac{1}{2}\Delta t + \frac{1}{4}\Delta t^2)$$

$$\Delta u_3 = u_2 \Delta t = u(0)(\Delta(+ \frac{1}{2}\Delta t^2 + \frac{1}{4}\Delta t^3)$$

$$u_3 = u(0) + \Delta u_3 = u(0)(1 + \Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2 + \frac{1}{4}\Delta t^3)$$

$$\Delta u_4 = u_3 \Delta t = u(0)(\Delta(+ \Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta t^3 + \frac{1}{4}\Delta t^4)$$

であるので、

$$u(1) = u(0) + \frac{\Delta u_1 + 2\Delta u_2 + 2\Delta u_3 + \Delta u_4}{6}$$
$$= u(0)(1 + \Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\Delta t^3 + \frac{1}{24}\Delta t^4)$$
$$= u(0)(1 + \frac{1}{1!}\Delta t + \frac{1}{2!}\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\Delta t^3 + \frac{1}{4!}\Delta t^4)$$

となる。これは e^t のマクローリン級数の第4次近似式を表しているため、これは厳密解と一致する。

5－43

【解説】

スライド参照

第7節　機構の解析モデル

学習のねらい

この節では、2つの例題をもとに機構のモデル化および自由度の計算方法について述べる。

7－1　早戻り機構

7－2　歯車・スライダ機構

5－44

【節全体のねらい】

この節では、2つの例題をもとに機構のモデル化および自由度の計算方法について述べる。

【解説】

7－1　早戻り機構

7－2　歯車・スライダ機構

７－１　早戻り機構

ここでは、形削り盤に使用されている早戻り機構（クイックリターンメカニズム）を扱う。この機構は図5-23に示すように、クランク（ボディ3）が反時計方向に回転すると、工具（ボディ6）が工作物上を左へ移動し切削が行われる。そして、工具が右に移動するときが早戻り工程である。
下図3-23において、AからFは関節、①から⑥はボディを表している。

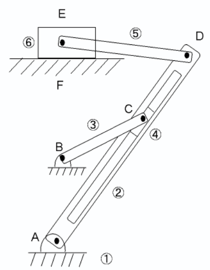


図5－23　早戻り機構

5－45

【ポイント】

早戻り機構

【解説】

ここでは、形削り盤に使用されている早戻り機構（クイックリターンメカニズム）を扱う。

この早戻り機構の構成部品、拘束条件、自由度等を下記に示す。

構成ボディ数　　6個

一般化座標の総数　　nc=18

拘束条件	関節の種類	拘束数
回転関節	A	2
	B	2
	C	2
	D	2
	E	2
並進関節	C	2
	F	2
ベースの拘束条件（ボディ1）		3
拘束の総数		nh=17

機構の自由度　DOF=nc-nh=18-17=1

この早戻り機構の場合、機構の自由度は1であるので、ボディ3に回転駆動を付加する。

5－46

【解説】

スライド参照

７－２　歯車・スライダ機構

下図5-24は歯車列が形削り盤の可変行程スライダを駆動する複合機構である。3つの車を組み合わせることにより、ボディ5がスライダ（ボディ6）の行程を制御するように回転しているときでも、第一の歯車（ボディ2）の入力回転が第三の歯車（ボディ4）に伝達できる。下図5-24において、AからEは関節、①から⑥はボディを表している。

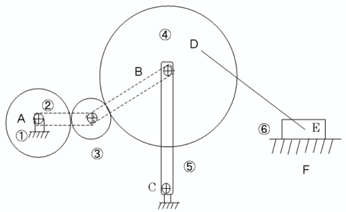


図5－24　歯車・スライダ機構

5－47

【ポイント】

歯車・スライダ機構

【解説】

下図5-24は歯車列が形削り盤の可変行程スライダを駆動する複合機構である。

この歯車・スライダ機構の構成部品、拘束条件、自由度等を下記に示す。

構成ボディ数　　6

一般化座標の総数　nc=18

拘束条件	関節の種類	拘束数
回転関節	A	2
	B	2
	C	2
歯車の伝達列	歯車2・歯車3	1
	歯車3・歯車4	1
距離拘束	歯車2・歯車3	1
	歯車3・歯車4	1
	歯車4・スライダ	1
並進関節	F	2
ベースの拘束	A	3
拘束の総数		nh=16

機構の自由度　DOF=nc-nh=18-16=2

この機構の場合、機構の自由度は2であるので、ボディ2の歯車とボディ5の行程制御リンクに駆動拘束条件を付加する。

5－48

【解説】

スライド参照

第8節　運動学拘束式と微分代数方程式の作成方法

学習のねらい

機構の設計者は、一般的に機構解析のソフトに付属しているCAD等を利用して解析したい機構のモデルを作成する。モデルを作成すると機構解析のソフトは自動的に運動学拘束式や微分代数方程式を作り出し、数値計算法を用いて解いてくれる。この節では、手動で4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法と2重振り子の微分代数方程式の作成方法について述べる。

8－1　4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法
8－2　2重振り子の微分代数方程式の作成方法

5－49

【節全体のねらい】

機構の設計者は、一般的に機構解析のソフトに付属しているCAD等を利用して解析したい機構のモデルを作成する。モデルを作成すると機構解析のソフトは自動的に運動学拘束式や微分代数方程式を作り出し、数値計算法を用いて解いてくれる。この節では、手動で4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法と2重振り子の微分代数方程式の作成方法について述べる。

【解説】

8－1　4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法

8－2　2重振り子の微分代数方程式の作成方法

8－1　4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法

図5-25に示す4つの回転関節（R1～R4）から成る4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法について述べる。

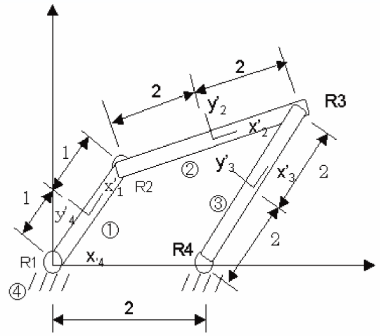


図5-25　4節リンク機構

5－50

【ポイント】

4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法

【解説】

図5-25に示す4つの回転関節（R1～R4）から成る4節リンク機構の運動学拘束式の作成方法について述べる。

点R1～R4の位置ベクトルを求めると、以下のようになる。
x4'-y4'座標系で表わした点R1の位置ベクトルは $s_4^{'R1} = [0 \quad 0]$ となる。
x1'-y1'座標系で表わした点R1の位置ベクトルは $s_1^{'R1} = [-1 \quad 0]$ となる。
x1'-y1'座標系で表わした点R2の位置ベクトルは $s_1^{'R2} = [1 \quad 0]$ となる。
x2'-y2'座標系で表わした点R2の位置ベクトルは $s_2^{'R2} = [-2 \quad 0]$ となる。

x2'-y2'座標系で表わした点R3の位置ベクトルは $s_2^{'R3} = [2 \quad 0]$ となる。
x3'-y3'座標系で表わした点R3の位置ベクトルは $s_3^{'R3} = [2 \quad 0]$ となる。
x3'-y3'座標系で表わした点R4の位置ベクトルは $s_3^{'R4} = [-2 \quad 0]$ となる。
x4'-y4'座標系で表わした点R4の位置ベクトルは $s_3^{'R4} = [2 \quad 0]$ となる。

回転関節のRi(i=1,2,3,4)の拘束式をスカラー形式で書くと以下のようになる。

$$\Phi_1^{Ri(j,k)} \equiv x_k + x_k^{'Ri} \cos\phi_k - y_k^{'Ri} \sin\phi_k - x_j - x_j^{'Ri} \cos\phi_j + y_j^{'Ri} \sin\phi_j = 0$$

$$\Phi_2^{Ri(j,k)} \equiv y_k + x_k^{'Ri} \sin\phi_k + y_k^{'Ri} \cos\phi_k - y_j - x_j^{'Ri} \sin\phi_j - y_j^{'Ri} \cos\phi_j = 0$$

上式を利用すると回転関節R1からR4の拘束式は次にようになる。

$$\Phi_1^{R1(1,4)} \equiv -x_1 + \cos\phi_1 + x_4 = 0$$
$$\Phi_2^{Ri(1,4)} \equiv -y_1 + \sin\phi_1 + y_4 = 0$$
$$\Phi_1^{R2(1,2)} \equiv -x_1 - \cos\phi_1 + x_2 - 2\cos\phi_2 = 0$$
$$\Phi_2^{R2(1,2)} \equiv -y_1 - \sin\phi_1 + y_2 - 2\sin\phi_2 = 0$$
$$\Phi_1^{R3(2,3)} \equiv -x_2 - 2\cos\phi_2 + x_3 + 2\cos\phi_3 = 0$$
$$\Phi_2^{R3(2,3)} \equiv -y_2 - 2\sin\phi_2 + y_3 + 2\sin\phi_3 = 0$$
$$\Phi_1^{R4(3,4)} \equiv -x_3 + 2\cos\phi_3 + x_4 + 2\cos\phi_4 = 0$$
$$\Phi_2^{R4(3,4)} \equiv -y_3 + 2\sin\phi_3 + y_4 + 2\sin\phi_4 = 0$$

5－51

【解説】

スライド参照

ボディ4（図中では④）をベースに固定するように絶対x,y,Φ拘束を課すと拘束式は次のようになる。

$$\Phi^{ax(4)} = x_4 = 0$$
$$\Phi^{ay(4)} = y_4 = 0$$
$$\Phi^{a\phi(4)} = \phi_4 = 0$$

さらにボディ1（図中では①）が角速度ωで回転するように駆動拘束をボディ1に課すと、駆動拘束式は以下のように表せる。

$$\Phi^{a\phi d(1)} = \phi_1 - \omega t$$

図5-25の4節リンク機構を解析する場合、一般化座標はつぎのように表される。

$$q = [x_1 \quad y_1 \quad \phi_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \phi_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad \phi_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad \phi_4]^T$$

5－52

【解説】

スライド参照

上記の結果を使用すると、運動学拘束式は次のようになる。

$$\Phi_k(q,t)=\begin{bmatrix} -x_1+\cos\phi_1+x_4 \\ -y_1+\sin\phi_1+y_4 \\ -x_1-\cos\phi_1+x_2-2\cos\phi_2 \\ -y_1-\sin\phi_1+y_2-2\sin\phi_2 \\ -x_2-2\cos\phi_2+x_3+2\cos\phi_3 \\ -y_2-2\sin\phi_2+y_3+2\sin\phi_3 \\ -x_3+2\cos\phi_3+x_4+2\cos\phi_4 \\ -y_3+2\sin\phi_3+y_4+2\sin\phi_4 \\ x_4 \\ y_4 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

駆動拘束式は次のようになる。

$$\Phi_D(q,t)=\left[\phi_1-\omega t\right]$$

運動学拘束と駆動拘束を合わせた全体の運動学拘束式は次のようになり、
駆動拘束の時間変化に従って $\Phi(q,t)=0$ を満たすように一般化座標qを
求める。これが、位置解析である。

$$\Phi(q,t)=\begin{bmatrix}\Phi^k(q)\\ \Phi^D(q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

5－53

【解説】

スライド参照

速度解析は次の速度方程式を

$$\Phi_q\dot{q}=-\Phi_t$$

を解くことにより一般化座標の速度を求めることができる。
上式の速度方程式で

$$\dot{q}=\left[\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{\phi}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{\phi}_2,\dot{x}_3,\dot{y}_3,\dot{\phi}_3,\dot{x}_4,\dot{y}_4,\dot{\phi}_4\right]^T$$

$$\Phi_t=\left[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-\omega\right]^T$$

である。さらに、ヤコビアン Φ_q は、

$$\Phi_q=\begin{bmatrix}
-1 & 0 & -\sin\phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \cos\phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & \sin\phi_1 & 1 & 0 & 2\sin\phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -\cos\phi_1 & 0 & 1 & -2\cos\phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\sin\phi_2 & 1 & 0 & -2\sin\phi_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2\cos\phi_2 & 0 & 1 & 2\cos\phi_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2\sin\phi_3 & 1 & 0 & -2\sin\phi_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\cos\phi_3 & 0 & 1 & 2\cos\phi_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

である。

5－54

【解説】

スライド参照

加速度解析は次の加速度方程式

$$\Phi_q \ddot{q} = -\left(\Phi_q \dot{q}\right)_q \dot{q} - 2\Phi_{qt}\dot{q} - \Phi_{tt}$$

を解くことにより一般化座標の加速度を求めることができる。
上式の加速度方程式で

$$\Phi_{tt} = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]^T$$

$$\Phi_{qt} = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]^T$$

$$\left(\Phi_q \dot{q}\right)_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos\phi_1\dot{\phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\phi_1\dot{\phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi_1\dot{\phi}_1 & 0 & 0 & 2\cos\phi_2\dot{\phi}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\phi_1\dot{\phi} & 0 & 0 & 2\sin\phi_2\dot{\phi}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cos\phi_2\dot{\phi}_2 & 0 & 0 & -2\cos\phi_3\dot{\phi}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\phi_2\dot{\phi}_2 & 0 & 0 & -2\sin\phi_3\dot{\phi}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\phi_3\dot{\phi}_3 & 0 & 0 & -2\cos\phi_4\dot{\phi}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sin\phi_3\dot{\phi}_3 & 0 & 0 & -2\sin\phi_4\dot{\phi}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5−55

【解説】

スライド参照

$$\left(\Phi_q \dot{q}\right)_q \dot{q} = \begin{bmatrix} -\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ -\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ \cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 + 2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 \\ \sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 + 2\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2 \\ 2\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 - 2\cos\phi_3\dot{\phi}_3^2 \\ 2\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2 - 2\sin\phi_3\dot{\phi}_3^2 \\ -2\cos\phi_3\dot{\phi}_3^2 - 2\cos\phi_4\dot{\phi}_4^2 \\ -2\sin\phi_3\dot{\phi}_3^2 - 2\sin\phi_4\dot{\phi}_4^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。

5−56

【解説】

スライド参照

８－２　２重振り子の微分代数方程式の作成方法

ここでは、動力学解析の例題として、図5-26に示す２つの回転関節（R１とR2）から成る2重振り子の微分代数方程式の作成方法について述べる。

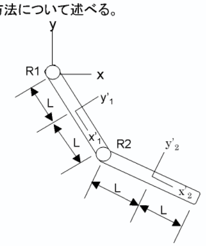


図5-26　２重振り子

点R1とR2の位置ベクトルを求めると、以下のようになる。
点R1の位置ベクトルは　$s_1^{'R1} = [-L, 0]$　となる。
点R2の位置ベクトルは　$s_1^{'R2} = [L, 0]$　となる。
点R2の位置ベクトルは　$s_2^{'R2} = [-L, 0]$　となる。

5－57

【ポイント】

２重振り子の微分代数方程式の作成方法

【解説】

図5-26に示す2つの回転関節（R1とR2）から成る2重振り子の微分代数方程式の作成方法について述べる。

この2重振り子の運動学拘束式は次にようになる。

$$\Phi(q,t) = \begin{bmatrix} x_1 - L\cos\phi_1 \\ y_1 - L\sin\phi_1 \\ x_2 - L\cos\phi_2 - x_1 - L\cos\phi_1 \\ y_2 - L\sin\phi_2 - y_1 - L\sin\phi_1 \end{bmatrix}$$

一般化座標は　$q = [x_1, y_1, \phi_1, x_2, y_2, \phi_2]^T$

一般化作用力は　$Q^A = [0, -m_1 g, 0, 0, -m_2 g, 0]^T$　である。ここで、m1、m2はボディ1とボディ2の質量である。

微分代数方程式は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^A \\ \gamma \end{bmatrix}$$

5－58

【解説】

スライド参照

この例題において

$$M=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{3}L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{3}L^2 \end{bmatrix} \quad \Phi_q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & L\sin\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L\cos\phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & L\sin\phi_1 & 1 & 0 & L\sin\phi_2 \\ 0 & -1 & -L\cos\phi_1 & 0 & 1 & -L\cos\phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\Phi_q\dot{q}\right)_q\dot{q}=-\begin{bmatrix} L\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ L\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2 \\ L\cos\phi_1\dot{\phi}_1^2+L\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 \\ L\sin\phi_1\dot{\phi}_1^2+L\sin\phi_2\dot{\phi}_2^2 \end{bmatrix}\equiv\gamma=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \gamma_4\end{bmatrix}$$

5－59

【解説】

スライド参照

第9節　衝突と摩擦

学習のねらい

2次元の衝突と摩擦についてのモデル化の方法について述べる

9－1　衝突

9－2　クーロン摩擦

5－60

【節全体のねらい】

2次元の衝突と摩擦についてのモデル化の方法について述べる。

【解説】

9－1　衝突

9－2　クーロン摩擦

９－１　衝突

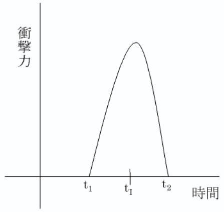
衝突による衝撃力がシステムに加えられると、運動方程式は以下のようになる。

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = Q^* + Q^e + Q^{eI}$$

ここでQ^*, Q^e, Q^{eI}　は速度の2次の項、一般化力／トルクと衝撃力ベクトルを表す。
上式を t_1からt_2 時間まで積分し、その極限を取ると

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\int_{t_1}^{t_2} M\ddot{q}dt \equiv M(t_I)\Delta\dot{q}(t_I),\quad \lim_{t_2-t_1\to 0}\int \Phi_q{}^T \lambda dt = \Phi_q{}^T(t_I)P^\lambda$$

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\int_{t_1}^{t_2} Q^* dt = 0,\quad \lim_{t_2-t_1\to 0}\int_{t_1}^{t_2} Q^e dt = 0,\quad \lim_{t_2-t_1\to 0}\int_{t_1}^{t_2} Q^{eI} dt = P^e$$



となる。まとめると、次のようになる。

$$M\Delta\ddot{q} + \Phi_q{}^T P^\lambda = P^e$$

この式を解くために、速度方程式が必要になる。
速度の不連続な変化と衝撃力に対する運動方程式は

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q{}^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\dot{q} \\ P^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。Q^{eI}　と表されている一般化衝突力は $Q^I = f\left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^T$　で表される。

この式を時間 t_1からt_2 まで積分し、その極限を取ると

$$P^I = \left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^T p = \lim_{t_2-t_1\to 0}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$　を得る。

5－61

【ポイント】

衝突現象のモデル化の手法を学ぶ。

$$\frac{\partial s}{\partial q}\Delta\dot{q} = -(1+e)\frac{\partial s}{\partial q}\dot{q}(t_I - 1)$$　のような関係がある。これらをまとめると、衝突に関する運動方程式は以下のようになる。

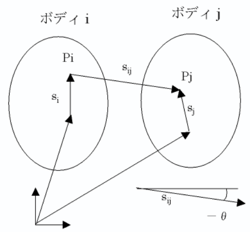
$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q{}^T & \left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^T \\ \Phi_q & 0 & 0 \\ \frac{\partial s}{\partial q} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\dot{q} \\ P^\lambda \\ -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1+e)\frac{\partial s}{\partial q}\dot{q}(t_I - 0) \end{bmatrix}$$

ここで、e：反発係数、

$$\frac{\partial s}{\partial q} = [0,\cdots,0,\cos\theta,\sin\theta,n_i,0,\cdots,0,-\cos\theta,-\sin\theta,-n_i,0,\cdots,0,]$$

$$n_i = -(\xi_i\sin\phi_i + \eta_i\cos\phi_i)\cos\theta + (\xi_i\cos\phi_i - \eta_i\sin\phi_i)\sin\theta$$

$s_i' = [\xi_i, \eta_i]^T$,　$s_j' = [\xi_j, \eta_j]^T$　　である。



衝突時の運動は次のようにして求める。

(i)衝突時刻　まで次式のDAEを積分し、上式を $\Delta\dot{q}$　に対して解く。

(ii)　$\dot{q}(t_I + 0) = \dot{q}(t_I - 0) + \Delta\dot{q}$　とし、前の積分から得た位置を初期条件とし、次式のDAEの積分を再実行する。

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q{}^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^A \\ \gamma \end{bmatrix}$$

5－62

【解説】

スライド参照

９－２　クーロン摩擦

クーロンの法則による摩擦力は次のように表される。

$$F^f = \mu(q,\dot{q})F^n = \mu(q,\dot{q})V(q)\Phi_q^T\lambda$$

ここで、$\mu(q,\dot{q})$ は摩擦係数、Vは座標変換を表す。
運動摩擦によるボディに働く一般化力は次のように表される。

$$Q^f = \mu(q,\dot{q})B(q)V\Phi_q{}^T\lambda$$

ここで、$B(q)$ は、各関節に働く摩擦力をボディに働く一般化力に変換する行列である。

5－63

【ポイント】

クーロン摩擦のモデル化手法を学ぶ。

（1）回転関節の摩擦

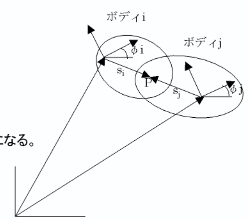
回転関節の場合にはVは

$$V = -\begin{bmatrix} A_i^T & 0 \\ s_i^T R A_i^T & 1 \end{bmatrix}$$ となる。ここで、$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ である。

ボディiの回転関節kにおける反力は

$$F^n = -\begin{bmatrix} \lambda_1^k \cos\phi_i + \lambda_2^k \sin\phi_i \\ -\lambda_1^k \sin\phi_i + \lambda_2^k \cos\phi_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x''} \\ F_{y''} \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。垂直抗力は $N = \sqrt{F_{x''}^2 + F_{y''}^2}$ である。
関節の座標系における摩擦力は次式のようになる。



$$F^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\mu N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\mu\sqrt{F_{x''}{}^2 + F_{y''}^2} \end{bmatrix}$$

ここで、aは回転関節の半径である。
関節の摩擦によるボディiの一般化力のベクトルは

$$Q_i^f = F^f \times sign(-\dot{\phi}_{ij})$$

となり、ボディjに関しては $Q_j^f = -Q_i^f$ である。

5－64

【ポイント】

回転関節の摩擦力の求め方を学ぶ。

（2）並進関節の摩擦

並進関節の場合にはVは

$$V=-\begin{bmatrix} C_i^T A_i^T & 0 \\ s_i'^T R A_i^T & 1 \end{bmatrix}$$ となる。ここで、$C=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ である。

ボディiの回転関節kにおける反力は

$$F^n=-\begin{bmatrix} \lambda_1^k (y_i^P-y_i^Q)\cos(\phi_i+\beta)-\lambda_1^k (x_i^P-x_i^Q)\sin(\phi_i+\beta) \\ -\lambda_1^k (y_i^P-y_i^Q)\sin(\phi_i+\beta)+\lambda_2^k (x_i^P-x_i^Q)\cos(\phi_i+\beta) \\ E_2\lambda_2+E_3\lambda_1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} F_{x''} \\ F_{y''} \\ E_2\lambda_2^k+E_3\lambda_1^k \end{bmatrix}$$

である。ここで、$E_3=(x_i^P-x_j^P)(x_i^P-x_i^Q)+(y_i^P-y_j^P)(y_i^P-y_i^Q)$ である。

垂直抗力は $N=F_{y''}$ となる。
関節の摩擦によるボディiの一般化力ベクトルは

$$Q_i^f=\begin{bmatrix} A_iC_i \\ s_i'^T R^T C_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}\times \mathrm{sign}(-v_{ij})=\begin{bmatrix} A_iC_i \\ s_i'^T R^T C_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu\left(\left|F_i^P\right|+\left|F_i^Q\right|\right) \\ 0 \end{bmatrix}\times \mathrm{sign}(-v_{ij})$$

となる。ここで、$F_i^P=N-F^\phi$, $F_i^Q=F^\phi$, $F^\phi=-\dfrac{E_2\lambda_2^k+E_3\lambda_1^k}{L}$ である。

関節の摩擦によるボディiの一般化力ベクトルは

$$Q_i^f=-\begin{bmatrix} A_iC_i \\ s_i'^T R^T C_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}\times \mathrm{sign}(-v_{ij})=-\begin{bmatrix} A_iC_i \\ s_i'^T R^T C_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu\left(\left|F_i^P\right|+\left|F_i^Q\right|\right) \\ 0 \end{bmatrix}\times \mathrm{sign}(-v_{ij})$$

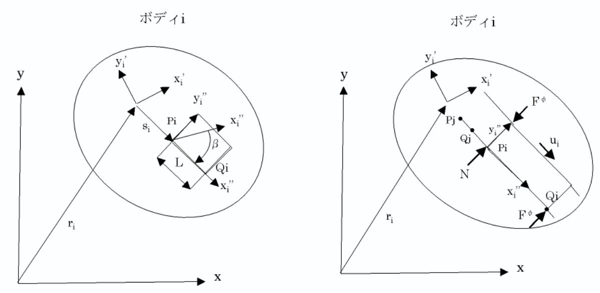
となる。ここで、$v_{ij}=\left[\dot{x}_i-\dot{x}_j, \dot{y}_i-\dot{y}_j\right]u_i$, $u_i=A_iu_i'$, $F_i^P=N-F^\phi, F_i^Q=F^\phi$, $F^\phi=-\dfrac{E_2\lambda_2^k+E_3\lambda_1^k}{L}$

である。vijは並進相対速度、uiはボディiの並進関節に平行なx''軸方向の単位ベクトルを表している。

5−65

【ポイント】

並進関節の摩擦力の求め方を学ぶ。



5−66

【解説】

スライド参照