＜研究ノート＞

ヨセフスの問題

関東職業能力開発大学校　　加　部　通　明

Josephus Problem

Michiaki KABE

要約　企業人スクールで「視て分る情報数学」をオーダコース設定し、それを実施した。
標語「視て分かる」ということから、視覚に訴えるような講義を行った。今回、ヨセフスの問題を取り上げ、人を円形に並べるという特徴を活かし、図形をふんだんに用いた証明法を考案したので報告する。

一般的に、ヨセフスの問題は漸化式と数学的帰納法を使用して解かれているが、本稿では、ある特別な場合に限定した問題を数学的帰納法のみを使用して解いた。

Ⅰ　はじめに

ヨセフスの問題とは、mとnが正の整数で、n>mとするとき、n人の人間を１からnまでの番号で識別して、番号順に円形に並べる。このとき、残っている人達を１から始めてm人目ごとに除去していって、最後に一人だけ残るまで繰り返す。そして、最後に残った人の番号を$J_m(n)$で記したとき、$J_m(n)$がどのように表せるかを求める問題である[1]。

例えば、m=２、n=６の場合（図１）、除去する番号を順に列挙すると、２→４→６→３→１となって最後に５が残るから、$J_2(6)$=５となる。

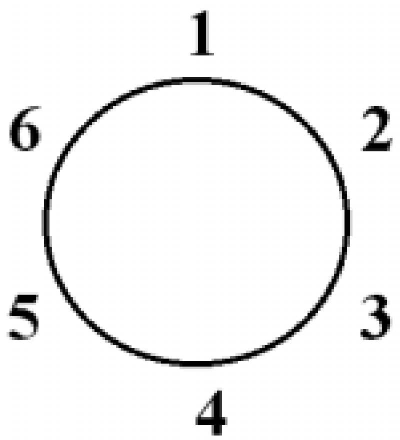

図１　６人円形に並んだ場合

この問題の良く知られている一般的な解法では、必ず数学的帰納法と漸化式が使用されている。逆に言えば、数学的帰納法と漸化式を学習するのに格好な題材となっている。また、日本にもこの問題と類似した「継子立て」と言う古い問題があり、インターネットには、パズルの分野にヨセフスの問題と一緒に、解法や出展或はその由来等が解説されている多くのWebページが存在する[注1]。

本稿では、m=２に特化した$J(n)=J_2(n)$について、漸化式を使用しない数学的帰納法だけで証明する視覚に訴えるような方法について報告する。

Ⅱ　問題の考え方

一見して捉えどころのない問題については、いきなり一般のnについて考える前に、簡単な場合から問題を考えるのが良く用いられる方法である。つまり、幾つかの小さいな数をnに当てはめ、その後、それらの結果を類推し一般式を立てることを試みるのである。

そこで、まず最初に、n=1, 2, 3, 4, ...等nが小さい数の場合、具体的にJ(n)がどうなるかを調べて見ると、表１の結果が得られる。そして、表１からJ(n)の一般的な形を推測するのである。その推測手順を示すと以下のようになる。

表１　nが小さい数の場合のJ(n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11

論文受付日　H17.12.7

[一般式の推測手順]

①n=1, 2, 3, 4, ...等nが小さい数の場合にJ(n)がどうなるかを調べる。

②その結果、$n=2^k$の場合、$J(2^k)=1(k\geqq 0)$なることが予想され、それを先ず証明する。

③次に、$n=2^k+s$の場合、$J(2^k+s)$をs=1, 2, 3, ...等sが小さい数の場合について調べて見ると②と併せて

$J(2^k+s)=2s+1,\quad 0\leqq s\leqq 2^k-1$

が予想されるので、それを証明する。

Ⅲ　推測した一般式の証明

証明を2段階に分け、数学的帰納法を用いて行う。以下では、消去を除去と同じ意味で使用している。

1　$J(2^k)=1$（$k\geqq 0$）の証明

先ず数学的帰納法の出発点から始める。

(1) k=0, 1, 2のときは表1から与式は成立する。

(2) k=t（≧2）のとき、与式が成立すると仮定し、k=t+1のときも成立することを示す。

2^{t+1}人のとき、2^t人並んだ円①の外側の円②に円①と同じようにして2^t人を並べる（図2）。そこで、順番に2人目ごとに除去していくと、円①では偶数、続いて円②でも偶数が全て除去される。次に、奇数を除去すると、円①の最後は帰納法の仮定より2^t-1が除去され(注2)、その次の除去が同じく2^t+3となり、円②の除去は円①と同じ位置の番号となる。3周目では、5が除去され同じ論法で円①と円②の同じ位置の番号が除去され、最後の一周では円①では1の除去手前の番号x、 円②では2^t+1の除去手前の番号2^t+xとなるから、x, 2^t+x, 2^t+1の順に除去されて最後に1が残る。

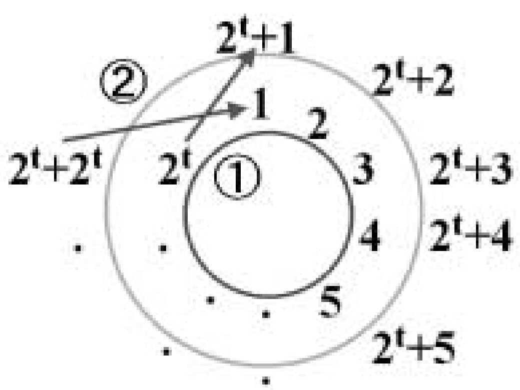

図2　$k=2^{t+1}$の場合における$k=2^t$との関係

2　$J(2^k+s)=2s+1$（$0\leqq s\leqq 2^k-1$）の証明

2.1　$J(2^k)=1$から分かること

全ての偶数が消去されて、2^{k-1}個の奇数が残った段階で、最初に消去される番号の一つ手前の番号が最後に残る（図3）。

2.2　$J(2^k+1)=3$の証明

1の証明と同じように、円①、②上に図4のように番号1から2^k+1を並べる。そこで、全ての偶数が除去された後、1が除去された状態で、2^k+1を1の場所に移すと、$n=2^k$の場合と同じ個数の奇数がピッタリと収る。このように奇数だけが残って、円①上だけにそれら奇数が並んだ状態を**全奇数状態**と呼ぶことにする。換言すると、全奇数状態とは順番に番号を除去していったときに、2^{k-1}個の奇数が残った段階での円形に並べられた番号の状態を表す。以上の内容を図4で示した。

また、図5では、全奇数状態で最初に消える番号が5であることを示している。今、全ての番号を時計の向きと反対方向に少し回転させ、2^kの場合と同じような位置関係にすれば、最後に3が残ることが分る（図6）。

以下、2^k+sについても同様な操作を行いうことによ

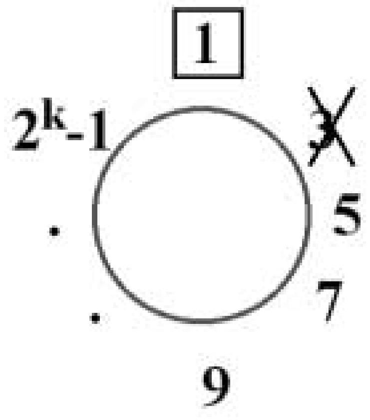

図3　最初に消える番号と最後に残る番号との関係

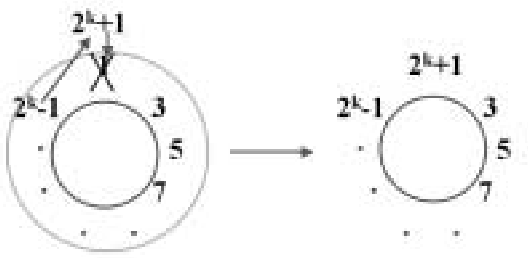

図4　全奇数状態への移行

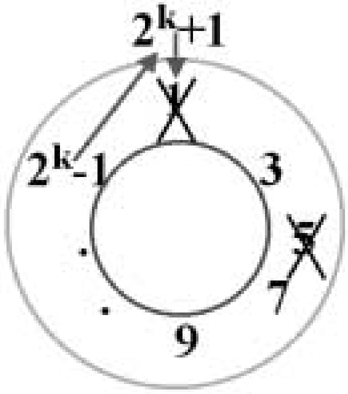

図５　n=2^k+１の場合における奇数番号の除去

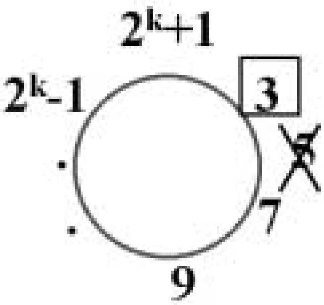

図６　全奇数状態における最初の除去と最後の残り

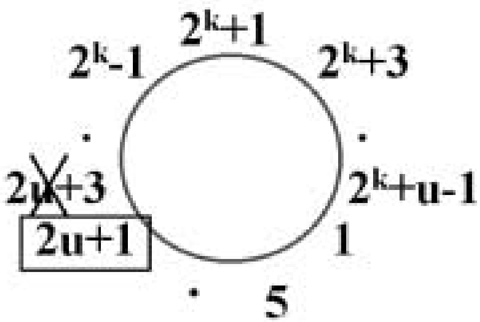

図７　数学的帰納法の仮定でuが偶数の場合における全奇数状態と最初に消える番号

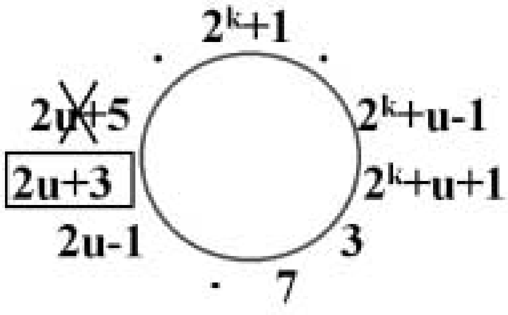

図８　uが偶数の場合における最後の残り番号

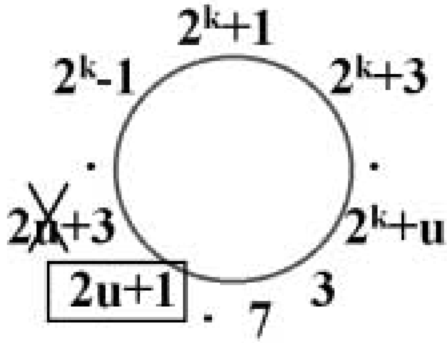

図９　数学的帰納法の仮定でuが奇数の場合における全奇数状態と最初に消える番号

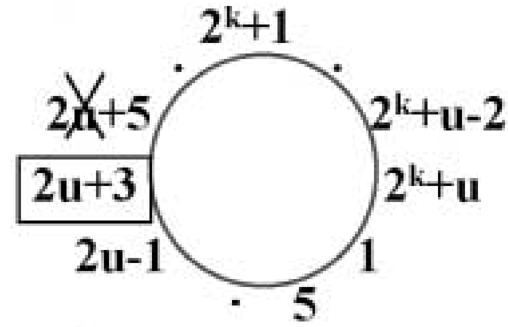

図10　uが奇数の場合における最後の残り番号

って、2^{k}の場合と同じ状態になることを次に示す。その前に、前述した内容を一般化して、次の補題が成り立つことを示す。

［補題］

全奇数状態では、最初に除去した番号の一つ手前の番号が最後に残る(注3)。

［証明］

全奇数状態では、sの値によらず残っている番号の個数は2^{k-1}で、常に同一である。よって、最初に除去した番号を図３の番号３と同じ位置まで回転させれば、

他の番号も相対的に回転して図3と同じ位置関係になる。従って、最後に残る番号は最初に除去した番号の一つ手前にある。（終）

2.3　J(2^k+s)=2s+1の数学的帰納法による証明

今、仮定よりs=u(0≦u≦2^k－2)のとき、全奇数状態で最初に消える番号は2u+3である[注4]。図7にuが偶数の場合、図9にuが奇数の場合がそれぞれ描かれている。次に、s=u+1のときに与式が成立することを示せば良い。その為には、uを偶数と奇数の場合に分けて示す。

(1) uが偶数の場合

2^k+uのときに2^k+u+1を追加すると、u+1は奇数より、新たに一つ番号が増えて、1, 5, 9, …なる4a+1型の奇数が順次消え、最後は2u+1が消える[注5]。そのとき、全奇数状態になっている。その状態で、最初に消えるのが2u+5であるから、最後に2u+3が残る(図8)。

よって、J(2^k+u+1)=2(u+1)+1が成り立つ。

(2) uが奇数の場合

2^k+uのときに、番号2^k+u+1を加えると、図10のようになる。このとき、3, 7, 11, …となる4a+3型の奇数が順次消えて、全奇数状態になる。従って、a=(u+1)/2－1を代入すれば、最後に消える番号が2u+1となって全奇数状態になる。このとき、偶数の場合と同じで、最初に消える番号が2u+5となるから、uが奇数の場合も与式が成り立つ。

以上から、uが0≦u≦2^k－2のとき、数学的帰納法により、J(2^k+u+1)=2(u+1)+1が証明された。

3　まとめ

上記1と2から、任意の非負なる整数kとkに依存する整数s対して、

J(2^k+s)=2s+1，(s=0, 1, 2, …, 2^k－1)

となる。

以上で証明が完結した。

Ⅳ　おわりに

今回、取り上げたヨセフスの問題はクヌースが著したConcrete Mathematicsの日本語訳から引用した。

クヌースの著作The Art of Computer Programming[2]は計算機科学の構造全体にかかわるほどの影響をもたらしたと言われている。その量は原書で全7巻、訳書で14分冊という大部である。

その中で、情報科学に係わる数学を、コンパクトに1冊にまとめ、具体的な例とその計算で解説したのがConcrete Mathematicsであると思われる。ここで言うコンパクトとは、The Art of Computer Programmingと比べての意味であって、その内容は、例えば、Σ記号の意味や使い方などついては、日本の純粋な数学書でもあまり見られない程の徹底的な説明と量の多さに驚かされる。また、演習問題数も全部で562題あり、その全てに解答と出典元が示されている。問題の程度は、容易なものから未解決問題まで広範である。更に、参考文献についても、本文中で引用したページ元まで書かれていて、その徹底ぶりがここでも伺われる。情報関係の教員には、是非一読を薦めたい書物と言える。

［注］

(注1)　例えば、以下のようなWebサイトがある。
http://www.mars.dti.ne.jp/~snzk/puzzexp/e-y.html
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/josephus/josephus.htm

(注2)　円①と円②は同じ位置にある番号が同じ順に独立に除去されるので、もし、番号2^t－1が除去されなければ、番号1が除去されて帰納法の仮定J(2^t)＝1に反する。

(注3)　当然のことであるが、最初に除去した番号は最後に残る番号の一つ先になっている。

(注4)　帰納法の仮定から、s=u(0≦u≦2^k－2)のとき、J(2^k+u)=2u+1が成立する。このときの全奇数状態は、円①上の奇数番号3から（4×u/2)－1が消えて、その跡に円②上の奇数番号2^k+1から2^k+u－1が全てすっぽり入っている。即ち、全奇数状態では、最初から円①上に存在する奇数番号2u+1から2^k－1までが残っている。従って、補題から、最初に除去した番号は最後に残る番号2u+1の次だから2u+3となる。

(注5)　2^k+1, 2^k+3，…, 2^k+u-1, 2^k+u+1の個数はuが偶数より、u/2+1個ある。よって、1, 5, 9, …, 4a+1なる型の奇数を消去するにはa=u/2を代入すればよいから、最後は2u+1となる。即ち、4a+1型の奇数が全部でu/2+1個消えるので差し引き0となり、全奇数状態となっている。

［参考文献］

(1) R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik Concrete Mathematics 1989 Addison-Wesley
日本語訳　有澤誠　安村通晃　萩野達也　石畑清
コンピュータの数学 1993　共立出版

(2) D. E. Knuth The Art of Computer Programming　1977 Addison-Wesley
日本語訳　サイエンス社