圧電アクチュエータを用いた片持送水管の最適出力フィードバック制御による安定化（速度フィードバックの場合）

東北職業能力開発大学校　　高　橋　史　明

Stabilization of Cantilevered Pipe Conveying Fluid with Piezoe lectric Actuators Using Optimal Output Feedback Controls（Case of Velocity Feedback)

Fumiaki TAKAHASHI

要約　本報は、振動制御に関する研究報告である。ここでは非保存的柔軟構造物の一つである片持送水管に起こる不安定振動を、管に張られた圧電アクチュエータを制御して安定化する問題を考える。

本報では、主フィードバック量として送水管の速度を用いた場合の出力フィードバックによる最適制御の有効性を検討し、最適出力フィードバック系が持つ種々の特性をシミュレーションにより明らかにした。

オイラーの曲げ理論に基づいて送水管をモデル化し、また、制御入力については出力フィードバックの最適制御理論にしたがって最適制御則を決定する。

その結果、変位フィードバック系と速度フィードバック系は互いに補完する働きがあること、速度による出力フィードバック制御は、状態フィードバック制御とそん色ない安定化効果が得られること、制御対象が強い不安定度を有する場合には、出力フィードバック制御では十分な安定化効果は期待できないこと、など明らかにした。

記 号 一 覧*

E_b, E_p ：縦弾性係数

E_b^*, E_p^* ：内部粘性係数

L_b , L_p ：長さ、　h_b ,h_p ：厚さ

I_b , I_p ：断面２次モーメント

m_b , m_p ：単位長さ当たりの質量

m_f ：流体の単位長さ当たりの質量

e_p ：圧電ひずみ、　V ：流速、　t ：時間

d_{31}, d_{33} ：圧電縦効果と圧電横効果の圧電定数

$\overline{V}$ ：印可電圧　$\overline{w}$ ：曲げ変位

x_1, x_2 ：圧電アクチュエータの両端点座標

＊添字 b は送水管、p はアクチュエータを表す

Ⅰ 緒 言

構造物は大形化、軽量化されるに伴って柔軟性が増加し励振されやすくなる。ジェット推進や流体力に代表される従動力の作用する非保存的弾性系の不安定振動に対する安定化の研究が近年多く報告されている[1]。本報では、非保存的柔軟構造物の一つである片持送水管に起こる不安定振動を、管に張られた圧電アクチュエータを制御して安定化する問題を考える。これについては、既に著者は出力フィードバックによる最適制御という実用的な安定化法の有効性を検討し、最適出力フィードバック系が持つ種々の特性を明らかにした[1]。その中では、主フィードバック量として送水管の曲げ変位を用いたが、この種の問題において速度フィードバックを行った場合の特性についても調べることは有意義であると考える。そこで本報では先の報告をふまえ、速度による出力フィードバック制御系の諸特性を明らかにする。

送水管は、オイラーの曲げ理論に基づいてモデル化する。また、制御入力については、出力フィードバックにおける最適制御理論[6][7]にしたがって最適制御則を決定する。なお、圧電アクチュエータによる制御力は、一対の集中曲げモーメントである。

Ⅱ 理 論

1 運動方程式と境界条件

論文受付日　H18.3.6

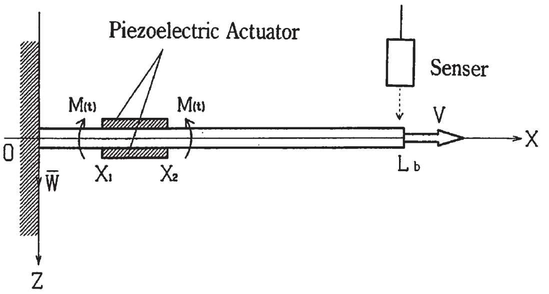


図１　圧電アクチュエータが取り付けられた送水管と座標系

図１に圧電素子を張った一様長方形断面を有する片持送水管と座標系を示す。長さ L_b 、縦弾性係数 E_b 、断面二次モーメント I_b 、単位長さ当たりの質量 m_b の送水管の内部を、単位長さ当たりの質量 m_f の非圧縮性流体が一定流速 V で流れる。送水管の両側面には縦弾性係数 E_p 、断面二次モーメント I_p 、単位長さ当たりの質量 m_p の圧電アクチュエータが x_1 から x_2 の区間（長さ $L_p=x_2-x_1$）に張られているものとする。そして、流速 V が限界流速を超えると送水管は不安定になり不安定振動（フラッタ）を起こす。そこで圧電アクチュエータにより発生する曲げモーメントを制御力として送水管を安定化する問題を考える。

アクチュエータに印加する電圧 $\overline{V}(t)$ と発生する曲げモーメント $M(t)$ の関係は次式で与えられる(2)。

$$M(t)=E_p h_p b(h_b+h_p)e_p(t) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} e_p(t)&=d_{33}\left[\overline{V}(t)/t_p\right]\cdots\text{圧電縦効果の場合} \\ e_p(t)&=d_{31}\left[\overline{V}(t)/h_p\right]\cdots\text{圧電横効果の場合} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここに、d_{33}、d_{31} はアクチュエータの圧電定数、t_p は積層形の場合の１層の厚さで、単板形の場合は全長 L_p に置換する。h_b、h_p はそれぞれ管とアクチュエータの厚さ、b はそれらの幅であり、e_p はアクチュエータの軸方向の圧電ひずみである。また、t は時間である。管と圧電素子は Kelvin-Voigt 形の粘弾性材であると仮定する。

このとき、曲げ変位を $\overline{w}(x,\ t)$ とすると、圧電アクチュエータの質量、粘性および剛性を考慮した片持送水管の運動方程式と境界条件はそれぞれ次式で与えられる(2)〜(4)。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left((1+\zeta_p H_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+(\mu+\mu_p H_1)\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \tau}\right)+2\sqrt{\beta_f}\,v\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$
$$+(1+\beta_p H_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}-\frac{6(k_b+k_p)\zeta_p}{3k_b^2+6k_b k_p+4k_p^2}\frac{d}{d\xi}\left[\delta(\xi-\xi_1)-\delta(\xi-\xi_2)\right]u(\tau)=0.$$

$$\cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned} & w\big|_{\xi=0}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}=0, \\ & \left[(1+\zeta_p H_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+(\mu+\mu_p H_1)\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \tau}\right]\bigg|_{\xi=1}=0, \\ & \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1+\zeta_p H_1)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+(\mu+\mu_p H_1)\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \tau}\right]\bigg|_{\xi=1}=0. \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(4)$$

$\delta(\cdot)$ はデルタ関数であり、また次の無次元量および関数を導入している。

$$\left.\begin{aligned} & w=\overline{w}/L_b && \text{：無次元変位} \\ & \xi=x/L_b && \text{：無次元座標} \\ & [\xi_1,\xi_2]=\frac{[x_1,x_2]}{L_b} && \text{：アクチュエータの無次元座標} \\ & \Delta\xi=L_p/L_b && \text{：アクチュエータの無次元長さ} \\ & [k_b,k_p]=\frac{[h_b,h_p]}{L_b} && \text{：無次元厚さ} \\ & \zeta_p=\frac{E_p I_p}{E_b I_b} && \text{：曲げ剛性比} \\ & [\beta_f,\beta_p]=\frac{[m_f,m_p]}{m_b+m_f} && \text{：質量比} \\ & [\mu,\mu_p]=\frac{[E_b I_b,E_p I_p]}{\sqrt{E_b I_b(m_b+m_f)L_b^4}} && \text{：粘性係数比} \\ & v=VL_b\sqrt{\frac{m_f}{E_b I_b}} && \text{：無次元流速} \\ & \tau=\frac{t}{\sqrt{(m_b+m_f)L_b^4/E_b I_b}} && \text{：無次元時間} \\ & u=e_p && \\ & H_1(\xi)=H(\xi-\xi_1)-H(\xi-\xi_2) && \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(5)$$

ここに、$H(\cdot)$ は単位ステップ関数、E_b^*、E_p^* はそれぞれ管およびアクチュエータの内部粘性係数である。

2　状態方程式と出力フィードバック制御系

境界条件式(4)を考慮して無次元変位 $w(\xi,\tau)$ を次のように仮定する。

$$w(\xi,\ \tau)=\sum_{m=1}^{N}a_m(\tau)\phi_m(\xi) \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここに、$a_m(\tau)$ は無次元時間に関する未知関数で、$\phi_m(\xi)$ は次の片持ばりの無次元化された自由曲げ振動の固有関数である。

$$\left.\begin{aligned}\phi_m(\xi)&=\cosh\alpha_m\xi-\cos\alpha_m\xi\\&\quad-\sigma_m(\sinh\alpha_m\xi-\sin\alpha_m\xi),\\\sigma_m&=\frac{\sinh\alpha_m-\sin\alpha_m}{\cosh\alpha_m+\cos\alpha_m}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ここに、α_m は片持ばりの無次元振動数[5]である。式(6)を用いて運動方程式(3)にガラーキン法を適用すると、結局、次の常微分方程式系が得られる。

$$\sum_{m=1}^{N}\left[M_{rm}\ddot{a}_m+D_{rm}\dot{a}_m+K_{rm}a_m\right]=G_r u\quad(r=1,\ 2,\cdots,N)\quad\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}M_{rm}&=\delta_{rm}+\beta_p d_{rm},\\D_{rm}&=\mu\alpha_m^4\delta_{rm}+\mu_p\{[\phi''_m\phi'_r-\phi'''_m\phi_r]\ |_{\xi_1}^{\xi_2}+\alpha_m^4 d_{rm}\}\\&\quad+2\sqrt{\beta_f}\ v b_{rm},\\K_{rm}&=\alpha_m^4\delta_{rm}+\zeta_p\{[\phi''_m\phi'_r-\phi'''_m\phi_r]\ |_{\xi_1}^{\xi_2}+\alpha_m^4 d_{rm}\}+v^2 c_{rm},\\G_r&=\frac{6(k_b+k_p)\zeta_p}{3k_b^2+6k_bk_p+4k_p^2}[\phi'_r(\xi_2)-\phi'_r(\xi_1)].\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\left.\begin{aligned}b_{rm}&=\frac{4}{(\alpha_r/\alpha_m)^2+(-1)^{r+m}}\\c_{rm}&=\begin{cases}\dfrac{4(\alpha_m\sigma_m-\alpha_r\sigma_r)}{(-1)^{r+m}-(\alpha_r/\alpha_m)^2}&(r\neq m)\\\alpha_r\sigma_r(2-\alpha_r\sigma_r)&(r=m)\end{cases}\\d_{rm}&=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha_m^4-\alpha_r^4}[\phi'''_m\phi_r-\phi_m\phi'''_r+\phi'_m\phi''_r-\phi''_m\phi'_r]\Big|_{\xi_2}^{\xi_1}\\\hfill(r\neq m)\\\dfrac{1}{4\alpha_r^4}[\alpha_r^4\xi\phi_r^2+3\phi_r\phi'''_r-2\xi\phi_r\phi'''_r-\phi'_r\phi''_r+\xi(\phi''_r)^2]\Big|_{\xi_2}^{\xi_1}\\\hfill(r=m)\end{cases}\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

ここに、$(\dot{\ })$ は τ に、$(\ )'$ は ξ に関する微分演算を表す。また、δ_{rm} はクロネッカのデルタである。

さて、上式(8)を状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}(\tau)$ を導入して次の状態方程式に書き換える。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\tau)+\boldsymbol{b}u(\tau).\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(\tau)=[a_1,a_2,\cdots,a_N,\dot{a}_1,\dot{a}_2,\cdots,\dot{a}_N]^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\\-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}&-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{D}\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{G}\end{bmatrix},\\&\boldsymbol{M}=[M_{rm}],\boldsymbol{D}=[D_{rm}],\boldsymbol{K}=[K_{rm}],\boldsymbol{G}=[G_r].\\&\hfill(r,m=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

また系の出力として、送水管先端（センサの位置）の速度を取ることにすると、出力方程式は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&y(\tau)=\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{x}(\tau)\\&\boldsymbol{c}=[0,0,\cdots,0,\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N]\ |_{\xi=1}(1\times2N)\end{aligned}\right\}(13)$$

本報では、出力である速度を主フィードバック量とする出力フィードバック系の構築を考える。このとき、制御入力は次式で表すことができる。

$$u(\tau)=-k\,y(\tau).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ここに、k はフィードバックゲインである。

以上から出力フィードバック制御系の状態方程式は式(14)を式(11)に代入し次式となる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}(\tau).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

3　もう１つの速度フィードバック制御系

ところで、速度のフィードバックを考える場合、式(13)以外にもう一つの出力方程式を考えることができる。すなわち、

$$\left.\begin{aligned}&y(\tau)=\hat{\boldsymbol{c}}\ \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\\&\hat{\boldsymbol{c}}=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N,0,0,\cdots,0]\ |_{\xi=1}(1\times2N)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

その場合には、出力フィードバック制御系の状態方程式は次式となる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=(\boldsymbol{I}+k\boldsymbol{b}\hat{\boldsymbol{c}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\tau).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

このとき、式(15)で表される速度フィードバック系（以下０形と呼ぶ）と直上の式(17)の系（以下１形と呼ぶ）は物理的に解釈すれば同じ制御系であるはずである。以下にその等価性を多入力多出力系に拡張して検討する。

図２(a)で表される０形と図２(b)で表される１形の速度フィードバック系をそれぞれ次式で表すものとする。

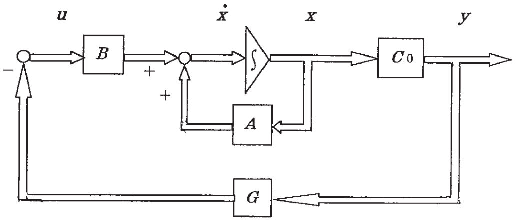
$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_0)\boldsymbol{x}(\tau).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_1)^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(\tau).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

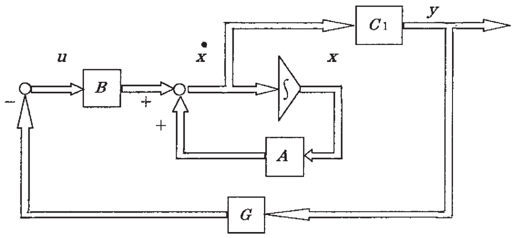
ここに、$\boldsymbol{A}\ (n\times n)$、$\boldsymbol{B}\ (n\times m)$、$\boldsymbol{G}\ (m\times l)$、$\boldsymbol{C}_1(l\times n)$ および $\boldsymbol{C}_2(l\times n)$ の行列であり、$n=2N$ とする。いま、２つのシステムが同一であると仮定すると $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_0)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_1)^{-1}\boldsymbol{A}$ より次式が得られる。

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

ここで、行列 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$ を次のようにブロック分割する。



（a） 0 形速度フィードバック系



（b） 1 形速度フィードバック系

図２　出力（速度）フィードバック制御系

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11}\\ \boldsymbol{B}_{21}\end{bmatrix},\\ &\boldsymbol{C}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}{}^{0} & \boldsymbol{C}_{12}{}^{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}{}^{1} & \boldsymbol{C}_{12}{}^{1}\end{bmatrix}.\end{aligned}\right\} \cdots(21)$$

ここに、小行列A_{11}等は$N\times N$行列、B_{11}等は$N\times m$行列、$C_{11}{}^{0}$や$C_{11}{}^{1}$等は$l\times N$行列である。式(21)に基づいて式(20)の左辺を計算すると次式が得られる。

$$(\text{式(20)左辺})=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12}\\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22}\end{bmatrix}, \qquad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_{11} &= \mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{A}_{21}-\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0}\\ &\quad -\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0}-\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0},\\ \mathbf{V}_{12} &= \mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{A}_{22}-\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0}\\ &\quad -\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0}-\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0},\\ \mathbf{V}_{21} &= \mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{A}_{21}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0}\\ &\quad -\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{0},\\ \mathbf{V}_{22} &= \mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{A}_{22}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0}\\ &\quad -\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{11}{}^{1}\mathbf{B}_{11}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0}-\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{1}\mathbf{B}_{21}\mathbf{G}\mathbf{C}_{12}{}^{0}.\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

ところで、式(12)から明らかなように、

$$\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{0}、\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{I}、\boldsymbol{B}_{11}=\boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

また２つの出力方程式(13)と式(16)からも分かるように、

$$\boldsymbol{C}_{11}{}^{0}=\boldsymbol{C}_{12}{}^{1}=\boldsymbol{0}、\boldsymbol{C}_{12}{}^{0}=\boldsymbol{C}_{11}{}^{1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

これらの条件(24)、(25)を考慮すると、結局式(22)は(左辺)=0となる。これは式(20)が恒等式であることに他ならない。

以上のことから、式(18)と式(19)で表される２つの速度フィードバック系は同一のシステムであることが導かれた。

以下、本報では式(18)で表される０形の速度フィードバック系を考えるものとする。

４　出力フィードバックによる最適制御

系の安定化を図るに当たり、次の評価関数Jの期待値が最小となるような制御入力の決定を考える。

$$J=\int_0^\infty \left[x^{\mathrm{T}}(\tau)Qx(\tau)+ru^2(\tau)\right]d\tau. \quad \cdots\cdots\cdots(26)$$

ここに、Qは状態量に関する半正定の重み行列、rは入力に関する正数の重み係数である。ところで初期状態は不確定であるのが一般的であるので、すべての初期ベクトル$\boldsymbol{x}(0)$について J を最小にする問題を考える代わりに、初期ベクトルの平均値が零かつ共分散行列がI 、すなわち初期ベクトル$\boldsymbol{x}_0$について$E[\boldsymbol{x}_0]=0$、$E[\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0{}^{\mathrm{T}}]=I$を仮定すると、評価関数の期待値は次式で与えられる[6]。

$$E[J]=\mathrm{tr}[\boldsymbol{S}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

ここに、$E[\cdot]$は期待値を、ｔr$[\cdot]$は行列のトレースを表している。また、Sは次のリヤプノフ方程式の解である。

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{bc})+(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{bc})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Q}+k^2r\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

本報では、まずゲインkに対する出力フィードバック系$(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{bc})$の安定領域を求め、次にその領域内で$E[J]$が最小となるゲイン k_{op}を数値的に探索し求めるものとする。

Ⅲ　数値計算例と考察

Ⅱ章までの解析に基づき数値計算を行う。その際、未定係数 a_m は、８項取ることで十分な精度が得られた。また、重み$\boldsymbol{Q}$は$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$ とし、初期ベクトルは管の初速度を零、自由端の初期変位が $w_0=0.01$ となるように定めた。以下の計算で固定したパラメータの値は表１のとおりである。これらの値は、圧電アクチュエータの発生する圧電ひずみを市販の製品[8]の15％程度を見込んで1×10^{-4}に設定し、文献(9) (10)で用いた試験体とおおむね相似になるように決めたものである。また、アクチュエータの長さ$\Delta\xi$はこの場合の

表１　数値計算に使用したパラメータの値

Parameter		Value
coef. of internal viscosity (pipe)	μ	0.01
coef. of internal viscosity (actuator)	μ_p	0.01
mass ratio of fluid to pipe	β_f	0.5
thickness ratio (pipe)	k_b	0.005
thickness ratio (actuatore)	k_p	0.002
rigidity ratio of actuator to pipe	ζ_p	1
mass ratio of actuator to pipe	β_p	1
non-dimensional actuator length	$\Delta\xi$	0.3

必要最小長さである$\Delta\xi=0.3$とした[11]。

リアプノフ方程式(28)については、対角変換行列を利用した解法で解を求める（付録参照）。また安定度には安定系を想定して$-\max[\mathrm{Re}(\lambda i)]$が用いられるが[12]、不安定系を扱う本報では不安定度を$\max[\mathrm{Re}(\lambda i)]$のように考える。ここに、$\lambda i$はシステムのｉ番目の固有値を表し、したがって不安定度とは複素平面上最も右側にある固有値の実部を表している。

１　フィードバックゲインの有効範囲

図３はフィードバックゲイン$\boldsymbol{k}$に対する速度フィードバック系$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{kbc})$の安定領域を、変位フィードバックの場合[1]と比較して示したものである。なお、流速$\boldsymbol{v}$については制御対象の不安定度が$\mathrm{Re}[\bar{\lambda}]=0.182$となるように選んでいる（$\bar{\lambda}$は不安定固有値）。

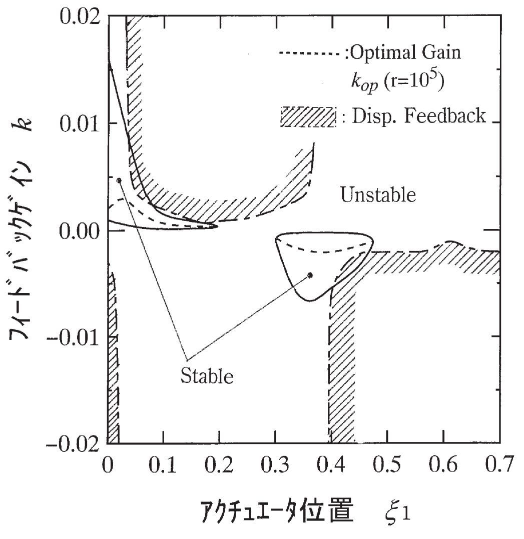


図３　出力フィードバックゲインの有効領域
（$\Delta\xi$=0.3、$\mathrm{Re}[\bar{\lambda}]$=0.182 を満たす$\boldsymbol{v}$）

この不安定度の値は、設定した圧電アクチュエータの能力で適正に安定化できる不安程度としてシミュレーションによって調査した上で選定した値である。

これより、変位フィードバックに比べ有効なゲインの領域がかなり狭まっていることがわかる。一方、その領域の位置は変位フィードバックのそれと交互に存在している。つまり両者は互いにその作用を補完する形になっている。これは、振動波形が変位と速度では位相が９０°ずれることになり、そのことで変位フィードバックと速度フィードバックとで制御入力の効果が逆になると考えられる。したがって、変位フィードバックで安定化できないアクチュエータの位置では速度フィードバックでは安定化が可能になると考えられる。なお図中の破線は、$r=10^5$の場合の最適ゲインを表す。

２　不安定度とゲイン領域

図４は制御対象の不安定度が変化するのに伴って、有効なフィードバックゲインの範囲がどう変化するかを調べたものである。図中の破線は、$r=10^5$の場合の最適ゲインを表す。

これより、不安定固有値の実部が2.3を越えると有効なゲイン領域が消失ししている。不安定の強い場合には、変位フィードバックでもそうであったように安定化できないことが分かる。

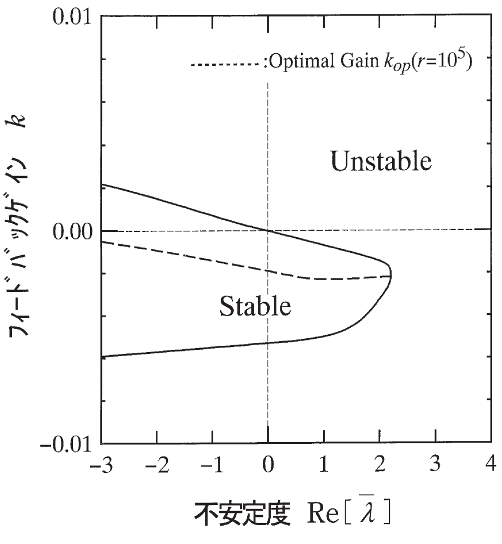


図４　制御対象の不安定度に対する出力フィードバックゲインの有効領域（$\Delta\xi$=0.3、ξ_1=0.4）

3　最適フィードバックゲイン

図５は重み r に対するその時の最適ゲイン k_{op} の絶対値の変化を示したものである。

重み係数 r を小さくして制御を強めるほどゲインの値は大きく変化しているが、$r<10^4$ では k_{op} の変化は小さい。すなわち得られる安定化効果に限界のあることが分かる。

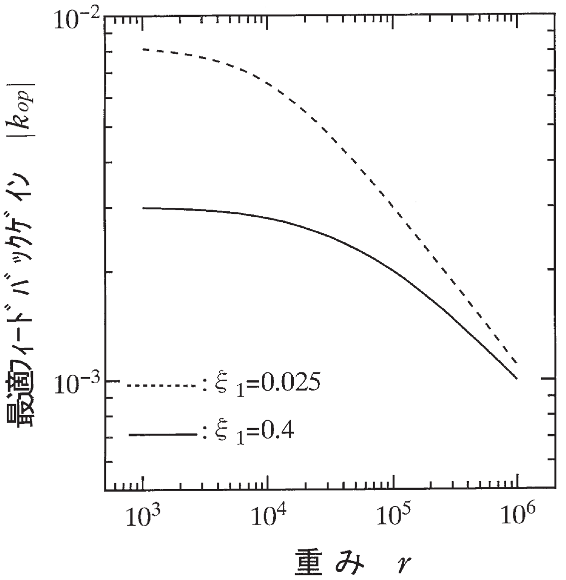


図５　重み係数 r と最適出力フィードバックゲインとの関係（$\Delta\xi$=0.3、ξ_1=0.4）

4　アクチュエータの最適位置

図６はアクチュエータの位置に対する評価関数の期待値を表したものである。変位フィードバックの結果[1]を重ねてある。ここに、不安定度は$\mathrm{Re}[\bar{\lambda}]$=0.182とした。なお、変位フィードバックの場合の評価関数値は変位の積分値であり、本報の速度の積分値より小さな値になる。したがって、両者の大小関係によって両者の制御効果の良否を直接比較できるものではないことに注意されたい。

これより評価関数最小の意味でのアクチュエータの最適位置として、期待値が極小となるξ_1=0.025とξ_1=0.40の２ヶ所が考えられる。また、その最適、最悪の位置関係は図３の安定領域に沿って変位の場合とは反対の傾向を示している。

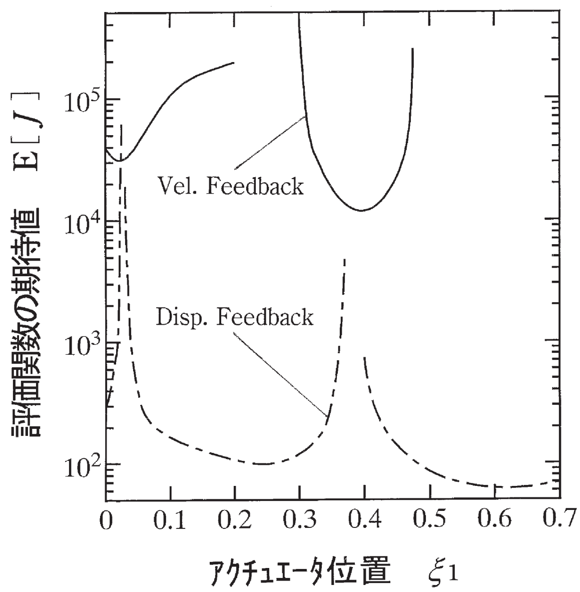


図６　アクチュエータの位置に対する評価関数の期待値の関係（$\Delta\xi$=0.3、r=10^5、$\mathrm{Re}[\bar{\lambda}]$=0.182を満たす$v$）

5　安定化のシミュレーション

前節までの結果を踏まえ、フラッタ状態にある送水管の安定化の様子をシミュレーションしたものが図７である。アクチュエータが前節で得られた最適位置に

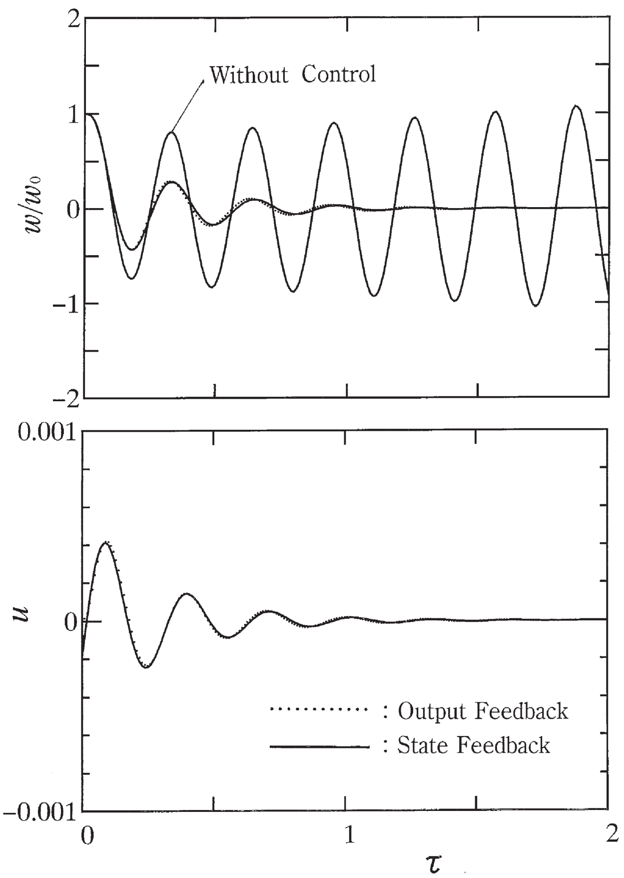


図７　送水管の変位の時間応答（$\xi=1$）と制御入力（$\Delta\xi$=0.3、r=10^5、ξ_1= 0.025、k_{op}= 0.003、v=9.608）

あるときの、制御入力と曲げ変位の応答波形を表している。なお、制御系の出力は速度であるが、シミュレーションに当たり変位を観察するようにしてある。

アクチュエータが最適位置にある場合には、出力フィードバック制御によっても状態フィードバック制御にそん色ない減衰効果が得られることが分かる。

Ⅳ　結論

本報では、片持送水管の速度による出力フィードバックを考え、２種類の速度フィードバック系についてその同一性について明らかにし最適制御を求めた。そして、数値シミュレーションによって制御系の持つ種々の特性を明らかにした。結論をまとめると以下の通りである。

(1) 変位フィードバック系と速度フィードバック系におけるアクチュエータの効果的取り付け位置の関係は互いに補完する関係になっている。
(2) 速度による出力フィードバック制御によって、適切な条件下では状態フィードバック制御とそん色ない安定化効果が得られる。
(3) 出力フィードバック系は制約が多いが、速度によるフィードバックは、変位による場合に比較しさらにその有効範囲が狭い。
(4) 制御対象が強い不安定を有する場合には、出力フィードバック制御による十分な安定化効果は期待できない。

[参考文献]

(1) 高橋史明、「圧電アクチュエータを用いた片持送水管の最適出力フィードバック制御による安定化(第１報，変位フィードバックの場合)」、機械学会論文集（C編）、第６７巻第６５５号、２００１年、P６９１。
(2) 高橋史明・谷順二、「流体ジェットの横従動力を受ける片持ばりの圧電アクチュエータによる能動制御」，日本機械学会論文集（Ｃ編），第５６巻第５２７号、１９９０年，Ｐ１８２６。
(3) Paidoussis, M. P. and Issid, N. T., "Dynamic Stability of Pipe Conveying Fluid", J. Sound Vib., Vol.33-3(1974),267.
(4) 杉山・熊谷・岸・川越、「送水管の安定性に関する研究（集中質量と減衰の効果)」、機械学会論文集（C編）、第５１巻第４６７号、１９８９年、Ｐ１５０６。
(5) 谷口修編、「振動工学ハンドブック」、養賢堂、１９７６年、第４章。
(6) 嘉納秀明、「現代制御工学」、日刊工業新聞社、１９８４年、P１８２－１８５。
(7) 趙相賢・大日方五郎、「出力フィードバック系の性質と制御系設計（低次元モデルからのアプローチ)」、機械学会論文集（C編）、第６３巻第６１３号、１９９７年、P３１７４。
(8) NEC/TOKIN、カタログ「圧電セラミック」、Vol.２、P１０。
(9) 谷順二・酢谷譲・高橋史明、「段付送水管の不安定現象」、D&D９０講演論文集、１９９０年、P１２８。
(10) 谷・長南・劉・高橋・大友・布田、「圧電素子による片持ばりの曲げ振動に対するデジタル最適制御」、機械学会論文集（C編）、第５６巻第５２５号、１９９０年、Ｐ１１４７。
(11) 高橋史明・中村茂・谷順二、「片持送水管の安定性と圧電アクチュエータによる能動制御」、機械学会論文集（C編）、第５６巻第５２６号、１９９０年、P１４８１。
(12) 西原修・松久寛、「受動形ジャイロ制振機構の最適設計（安定度最大化)」、機械学会論文集（C編）、第６２巻第６００号、１９９６年、P３０９０。

付録　リアプノフ方程式の解法

リアプノフ方程式は以下の固有値、固有ベクトルを用いた方法によって求める。

行列$\boldsymbol{A}\,(n\times n)$について、ある行列$\boldsymbol{Q}\,(n\times n)$を与えたときのリアプノフ方程式は未知行列を$\boldsymbol{P}\,(n\times n)$とすると、

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q} \quad \cdots\cdots(\mathrm{A1})$$

いま、$\boldsymbol{A}$の対角変換行列を$\boldsymbol{T}$とするとき、上式の両辺に右から$\boldsymbol{T}$、左から$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$を乗じ、$\boldsymbol{A}$の$n$個の固有値$\lambda_i$を成分に持つ対角行列を$\boldsymbol{\Lambda}$として、$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}$の関係を考慮すると、次式が得られる。

$$\boldsymbol{X\Lambda}+\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{C} \quad \cdots\cdots(\mathrm{A2})$$

ここに、$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PT}$、$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QT}$である。これより、行列$\boldsymbol{X}$の成分は次式のように求めることができる。

$$X_{ij}=-C_{ij}/(\lambda_i+\lambda_j),\quad (i,j=1,2,3,\cdots,n) \quad \cdots\cdots(\mathrm{A3})$$

以上から、リアプノフ方程式の解$\boldsymbol{P}$は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}^{-1} \quad \cdots\cdots(\mathrm{A4})$$